

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

С.И. Исаева, Л.В. Кнауб, Е.В. Юрьева

Математика

Учебное пособие

Красноярск

2011

Рецензенты:

А.А. Родионов старший научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН, д.ф.-м.н.

Я.Н. Нужин профессор кафедры «Математика» ФГБОУ ВПО ИрГУПС, д.ф.-м.н., профессор

Исаева С.И.

Математика: учеб. пособие / С.И. Исаева, Л.В. Кнауб, Е.В. Юрьева. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 161 с.

Учебное пособие посвящено основным разделам математики. Оно предназначено для студентов заочной формы обучения технических специальностей. Пособие состоит из программы дисциплины «Математика» для специальностей Политехнического института и Института нефти и газа, тринадцати разделов, вариантов контрольных работ и указаний по их выполнению, библиографического списка. В нем излагаются элементы теории чисел, алгебры, математического анализа, теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Указания по выполнению контрольных работ	4
Программа курса	5
Линейная алгебра	11
Векторная алгебра	19
Элементы аналитической геометрии	24
Введение в анализ	33
Дифференциальное исчисление функций одной переменной	38
Интегральное исчисление функций одной переменной	44
Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.....	52
Интегральное исчисление функции нескольких переменных	59
Теория функций комплексного переменного.....	69
Дифференциальные уравнения.....	76
Ряды	86
Теория вероятностей.....	93
Математическая статистика	114
Контрольные работы.....	125
Библиографический список	160

Указания по выполнению контрольных работ

Настоящие пособие предназначен для студентов направлений и специальностей, изучающих курс высшей математики по заочной форме обучения:

- 131000.62 – Нефтегазовое дело
- 151000.62 – Технологические машины и оборудование
- 240100.62 – Химическая технология
- 280705.65 – Пожарная безопасность
- 151000.62 – Технологические машины и оборудование
- 190600.62 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов
- 190110.65 – Транспортные средства специального назначения
- 150802.65 – Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика
- 150202.65 – Оборудование и технология сварочного производства
- 200503.65 – Стандартизация и сертификация
- 220501.65 – Управление качеством
- 151001.65 – Технология машиностроения
- 190100.65 – аземные транспортные системы
- 190201.65 – Автомобиле – и тракторостроение
- 190603.65 – Сервис транспортных и технологических машин и оборудования
- 190601.65 – Автомобили и автомобильное хозяйство
- 190701.65 – Организация перевозок и управление на транспорте

Объём и содержание всех разделов определены программой курса, составленной в соответствии с ФГОС Министерства образования РФ. Данное пособие не заменяет основную учебную литературу, а имеет своей целью помочь студенту–заочнику быстрее разобраться в материале, необходимом для выполнения контрольных работ и лучше усвоить наиболее сложные вопросы разделов. В пособии приведены основные определения, понятия и теоремы, а также приведены типовые задания.

Студент должен выполнять один и тот же вариант всех контрольных работ. Номер варианта совпадает с последней цифрой номера студенческого билета или зачетной книжки. Если номер студенческого билета заканчивается на 0, то нужно выполнять вариант №10.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. В начале работы разборчиво написать свою фамилию, инициалы, шифр, номер и вариант контрольной работы.
2. Каждую контрольную работу выполнять в отдельной тетради (или на белой бумаге формата А4).

3. Решения задач располагать в порядке номеров, указанных в контрольных работах. В начале каждого решения записывать условие задачи (без сокращений).

4. Решения задач и объяснения к ним должны быть подробными, аккуратными, без сокращения слов. Обязательно, если требуется, выполнять чертежи с пояснениями и нарисованными аккуратно.

Контрольные работы, выполненные с нарушением изложенных правил или не своего варианта, не засчитываются и возвращаются без проверки.

Получив прорецензированную работу, студент обязан исправить в ней отмеченные ошибки и недочеты. Зачтенные и исправленные контрольные работы предъявляются преподавателю при защите перед зачетом или экзаменом.

Программа курса

I. Линейная алгебра

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определитель матрицы. Минор. Алгебраическое дополнение.
3. Обратная матрица. Теорема существования обратной матрицы.
4. Ранг матрицы и его вычисление.
5. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
6. Теорема Кронекера - Капелли.
7. Матричный метод решения СЛАУ.
8. Метод Крамера решения СЛАУ.
9. Метод Гаусса решения СЛАУ.

II. Векторная алгебра

10. Векторы. Линейные операции над векторами.
11. Линейная зависимость векторов. Базис.
12. Декартовы прямоугольные координаты.
13. Скалярное произведение векторов.
14. Векторное произведение векторов.
15. Смешанное произведение векторов.

III. Элементы аналитической геометрии

16. Прямая на плоскости.
17. Плоскость в пространстве.
18. Прямая в пространстве.
19. Кривые второго порядка.

20. Полярная система координат. Связь полярных и декартовых координат точки.
21. Поверхности второго порядка.

IV. Введение в анализ

22. Элементарные функции.
23. Предел функции. Свойства пределов.
24. Неопределенности. Раскрытие неопределенностей.
25. Замечательные пределы.
26. Таблица эквивалентностей.
27. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

V. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

28. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной.
29. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции.
30. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.
31. Дифференцирование сложно-показательной функции.
32. Производные основных элементарных функций.
33. Производные высших порядков.
34. Дифференциал.
35. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, 1^0 , 1^∞ , ∞^0 .
36. Исследование функции методами дифференциального исчисления. Общая схема построения графика функции.

VI. Интегральное исчисление функций одной переменной

37. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
38. Таблица основных неопределенных интегралов.
39. Методы интегрирования: интегрирование по частям, замена переменной.
40. Интегрирование рациональных функций.
41. Интегрирование тригонометрических функций.
42. Определенный интеграл и его свойства.
43. Формула Ньютона - Лейбница.
44. Методы вычисления определенного интеграла.
45. Приложения определенного интеграла.

46. Несобственные интегралы.

VII. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

- 47. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность.
- 48. Частные производные. Полный дифференциал функции нескольких переменных.
- 49. Производная сложной и неявной функции нескольких переменных.
- 50. Частные производные высших порядков.
- 51. Экстремум. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции двух переменных.

VIII. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

- 52. Определение и свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла.
- 53. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
- 54. Приложения двойного интеграла.
- 55. Определение и свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла.
- 56. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.
- 57. Приложения тройного интеграла.
- 58. Криволинейные интегралы I рода.
- 59. Криволинейные интегралы II рода.
- 60. Формула Грина.

IX. Теория функций комплексного переменного

- 61. Комплексные числа. Алгебраическая форма.
- 62. Операции над комплексными числами.
- 63. Тригонометрическая форма. Показательная форма комплексного числа.
- 64. Возведение в степень, извлечение корня.
- 65. Функция комплексного переменного. Предел и непрерывность.
- 66. Дифференцируемость и аналитичность. Условия Коши-Римана.
- 67. Интеграл от функции комплексного переменного.
- 68. Интеграл Коши.

X. Дифференциальные уравнения

69. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).
70. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее решение. Задача Коши.
71. Уравнения с разделяющимися переменными.
72. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
73. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
74. Уравнение Бернулли.
75. Уравнение в полных дифференциалах.
76. Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка.
77. Уравнения, допускающие понижение порядка.
78. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.
79. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка.
80. Решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
81. Нормальная система дифференциальных уравнений.
82. Уравнения математической физики. Классификация уравнений математической физики.
83. Волновое уравнение. Решение задачи Коши методом Даламбера.
84. Уравнение теплопроводности. Решение задачи Коши методом Фурье.
85. Уравнение Лапласа. Решение задачи Дирихле в круге методом Фурье.

XI. Ряды

86. Числовые ряды. Сумма и сходимость числового ряда.
87. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.
88. Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость.
89. Знакопеременные ряды. Условная сходимость.
90. Функциональные ряды. Степенные ряды.
91. Ряд Тейлора. Разложение функций в степенные ряды.
92. Приложение рядов.
93. Ряды Фурье.

XII. Теория вероятностей

94. Случайные события. Алгебра событий.
95. Классическая вероятность. Частота, статистическая вероятность.
96. Аксиомы вероятности.

97. Теорема сложения вероятностей.
98. Зависимые и независимые события. Условная вероятность, теорема умножения вероятностей.
99. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
100. Элементы комбинаторики.
101. Независимые испытания. Формула Бернулли.
102. Предельные теоремы для схемы Бернулли (локальная теорема Лапласа, интегральная теорема Лапласа, формула Пуассона).
103. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения. Функция распределения. Плотность вероятности.
104. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение. Свойства.
105. Начальные и центральные моменты случайной величины.
106. Законы распределения дискретных случайных величин: биномиальное, Пуассона, геометрическое.
107. Законы распределения непрерывных случайных величин: нормальное, равномерное, распределение Симпсона, показательное, Лапласа.
108. Некоторые распределения случайных величин: биномиальное, Пуассона, равномерное, показательное, Лапласа.
109. Предельные теоремы теории вероятностей.
110. Двумерные случайные величины. Функция распределения. Плотность. Свойства.
111. Зависимые и независимые случайные величины. Коэффициент корреляции. Его свойства.

ХIII. Математическая статистика

112. Задачи математической статистики.
113. Генеральная совокупность, выборка. Статистические ряды абсолютных и относительных частот. Группированные статистические ряды.
114. Эмпирическая функция распределения. Полигон. Гистограмма.
115. Статистические оценки числовых характеристик случайных величин и их свойства (состоятельность, несмещенность, эффективность).
116. Выборочные числовые характеристики.
117. Методы получения точечных оценок (метод моментов, метод максимального правдоподобия).
118. Интервальные оценки: доверительный интервал и доверительная вероятность.

119. Статистические гипотезы. Простая, сложная. Нулевая, конкурирующая.
120. Статистический критерий, построение критических областей. Ошибки I и II рода.
121. Проверка гипотезы о виде функции распределения. Критерий Пирсона χ^2 .
122. Выборочный коэффициент корреляции.
123. Линейная регрессия. Выборочное уравнение линейной среднеквадратической регрессии.

I. Линейная алгебра.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

a_{ij} – произвольные числа. Первый индекс i – номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца. Матрица, содержащая m строк и n столбцов, имеет размерность $m \times n$.

Виды матриц:

1. Квадратные ($m = n$).
2. Прямоугольные ($m \neq n$).
3. Трапециевидные

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{mm} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Частный случай трапециевидной матрицы – *верхнетреугольная* матрица (в случае, когда $m = n$):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{11}, \dots, a_{nn} формируют *главную диагональ*, элементы a_{1n}, \dots, a_{n1} – *побочную диагональ*.

4. Квадратная матрица, у которой все элементы, за исключением элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* и обозначается: $diag(a_1, \dots, a_n)$.

5. *Скалярная* матрица (частный случай диагональной матрицы) – матрица, у которой все элементы равны друг другу. Среди всех скалярных матриц выделяют так называемую *единичную* матрицу:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Нулевая* матрица:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Две матрицы называются *равными*, если

- 1) порядки матриц совпадают,
- 2) равны соответствующие элементы.

Действия над матрицами.

Сложение матриц. При сложении матриц необходимо, чтобы матрицы имели одинаковую размерность.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix};$$

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения.

1. $A + B = B + A$ (коммутативность).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность).
3. $A + 0 = A$ (0 – нулевая матрица).

Умножение матрицы на число. При умножении матрицы на число, каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матрицы на число.

1. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Умножение матриц. Для умножения матриц необходимо, чтобы количество элементов в строке первого множителя равнялось количеству элементов в столбце второго множителя, т.е. $A_{m \times n} \cdot B_{n \times s} = C_{m \times s}$. При этом элементы результирующей матрицы C вычисляются по следующему правилу: $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ (элементы i -ой строки матрицы A умножаются на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B и результаты произведений складываются).

Рассмотрим умножение матриц на **примере**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения.

1. $AB \neq BA$ (умножение матриц некоммукативно).
2. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность).
3. $AE = EA = A$ (E - единичная матрица).
4. $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность).

Определитель матрицы.

Определитель – числовая характеристика только квадратных матриц. *Определитель матрицы второго порядка* это число, которое обозначается $|A|$ или $\det A$ и вычисляется по формуле:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Определителем матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} .$$

Определение. Пусть в произвольной матрице A размера $m \times n$ выбраны произвольно k – строк и k – столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k – ого порядка, определитель которой называется *минором* k – ого порядка матрицы A .

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число

$$A^{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n-1} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Определитель квадратной матрицы A произвольного размера n будем находить по правилу:

$$\det(A) = a_{i1}A^{i1} + a_{i2}A^{i2} \dots + a_{in}A^{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A^{ij},$$

где a_{ij} – элементы i -ой строки матрицы A , A^{ij} – алгебраические дополнения к ним. Данная запись называется *разложением определителя по i -ой строке*. Разложение можно выполнить по любой строке. Аналогичным образом определяется разложение по любому столбцу.

Определение. Преобразование матрицы, при котором её строки становятся столбцами, называется *транспонированием* ($a_{ij} \leftrightarrow a_{ji}$) и обозначается A^T .

Обратная матрица.

Определение. Будем называть матрицу *невырожденной*, если определитель этой матрицы не равен нулю, и *вырожденной* – в противном случае.

Определение. *Обратной* для матрицы A будет называться такая матрица A^{-1} , что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема (существования и единственности обратной матрицы). Для любой невырожденной квадратной матрицы порядка n существует и притом единственная обратная матрица A^{-1} .

Обратная матрица находится следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A^{11} & A^{21} & \dots & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & \dots & A^{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{1n} & A^{2n} & \dots & A^{nn} \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы и его вычисление.

Определение. *Рангом* матрицы A называется максимальный порядок отличных от нуля миноров этой матрицы и обозначается $r(A)$.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в произвольной матрице A размера $m \times n$ найден минор k – ого порядка M_k , отличный от нуля.

Рассмотрим лишь те миноры $k + 1$ – ого порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M_k : если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k . В противном случае, среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $k + 1$ – ого порядка, и вся процедура повторяется.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Определение. Системой линейных алгебраических уравнений будем называть следующее:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

В матричном виде система линейных алгебраических уравнений может быть записана в виде:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – основная матрица коэффициентов системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – столбец свободных коэффициентов.}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ – расширенная матрица системы.}$$

Теорема (Кронекера - Капелли). Для того чтобы система линейных уравнений была совместна (имела решения), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы:

$$r(A) = r(\bar{A}) = r.$$

В случае совместной системы:

- 1) если ранг равен числу неизвестных $r = n = m$, то система имеет единственное решение (*определенная*);
- 2) если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений (*неопределенная*).

Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.

Если система линейных алгебраических уравнений совместна, $r = n = m$ и имеет вид:

$$AX = B, \quad \text{где } |A| \neq 0,$$

тогда решение системы может быть найдено по формуле:

$$X = A^{-1}B.$$

Метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений.

Для совместной системы линейных алгебраических уравнений, $r = n = m$:

$$AX = B, \quad \text{где } |A| \neq 0$$

имеют место формулы Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где $\Delta = |A|$, а Δ_j – определитель, полученный из Δ путем замены j – ого столбца столбцом свободных коэффициентов ($j = 1, 2, \dots, n$).

Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим произвольную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Метод Гаусса позволяет решать произвольные системы линейных алгебраических уравнений, даже если определитель матрицы коэффициентов равен нулю или количество неизвестных не совпадает с количеством уравнений.

Определение. *Элементарными преобразованиями* систем линейных уравнений будем называть следующие преобразования:

- 1) замена местами двух строк (уравнений) системы;
- 2) умножение обеих частей одного из уравнений на одно и то же число $k \neq 0$;
- 3) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответственных частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число k .

Прямой ход метода Гаусса основан на приведении системы линейных уравнений путём элементарных преобразований к трапециевидному виду. Суть метода заключается в следующем:

- 1.Предположим, не нарушая общности рассуждений, что элемент $a_{11} \neq 0$ (иначе меняем строки местами).
- 2.Пусть во второй строке коэффициент при x_1 не равен нулю. Умножим первую строку на $(-a_{21})$, а вторую строку на a_{11} и складываем эти две строки, записывая результат вместо второй строки. Очевидно, после преобразования коэффициент при x_1 равен нулю.
- 3.Продельвая данную операцию с третьим уравнением, четвертым и т.д. исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого.
- 4.Исключая из рассмотрения первое уравнение, получим систему уравнений, на порядок меньшую, от неизвестных x_2, \dots, x_n , с которой проделаем описанные выше преобразования. После конечного числа шагов мы придем к системе вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + \dots + a_{1m}'x_m + \dots + a_{1n}'x_n = b_1', \\ a_{22}'x_2 + \dots + a_{2m}'x_m + \dots + a_{2n}'x_n = b_2', \\ \dots \quad \dots \\ a_{mm}'x_m + \dots + a_{mn}'x_n = b_m'. \end{array} \right.$$

Неизвестные с номерами $1, 2, \dots, m$ в дальнейшем будем называть *главными неизвестными*, а остальные $m+1, \dots, n$ – *свободными*.

Обратным ходом метода Гаусса находим общее решение. Если обозначить свободные неизвестные:

$$x_{m+1} = c_1, x_{m+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-m},$$

то из последнего уравнения мы сможем вычислить значение x_m , из предпоследнего – x_{m-1} и т.д. Поднимаясь по системе вверх, в итоге получим значения всех остальных неизвестных. Таким образом, *общее решение* – это решение, зависящее от c_1, c_2, \dots, c_{n-m} и таких решений бесконечно много, а *частное решение* – решение при конкретных числовых значениях c_1, c_2, \dots, c_{n-m} .

II. Векторная алгебра

Определение. *Скаляр* – величина, полностью характеризующаяся своим числовым значением в выбранной системе единиц.

Определение. Величина, кроме числового значения характеризующая еще и направлением, называется *вектором*. Геометрически вектор изображается как направленный отрезок в пространстве.

Определение. *Модуль* (длина) вектора \vec{a} – это численное значение без учета направления и обозначается $|\vec{a}|$.

Определение. Вектор, модуль которого равен 0, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Определение. Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются *равными*, если они расположены на параллельных (совпадающих) прямых и имеют одинаковую длину и одинаково направлены.

Линейные операции над векторами.

Определение. Суммой нескольких векторов, например \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} , называется вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, по величине и направлению равный замыкающей пространственной ломаной линии, построенной на данных векторах.

Для случая двух векторов \vec{a} и \vec{b} их суммой является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки приложения их (правило параллелограмма).

Свойства векторного сложения:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Для каждого вектора \vec{a} существует *противоположный* вектор $-\vec{a}$, имеющий ту же длину, но противоположное направление. По правилу параллелограмма имеем $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Определение. Произведением вектора \vec{a} на скаляр k , называется вектор $\vec{b} = k\vec{a} \equiv \vec{a}k$, имеющий длину $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$, направление которого:

- 1) совпадает с направлением \vec{a} , если $k > 0$,
- 2) противоположно направлению \vec{a} , если $k < 0$,
- 3) произвольно, если $k = 0$.

Свойства:

1. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.
2. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
3. $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$.
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
5. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
6. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Определение. Если вектор \vec{a} разделить на его длину $|\vec{a}|$, то получим *единичный вектор* \vec{e} , так называемый *орт*, того же направления. Тогда имеем стандартную форму вектора $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Определение. Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются *коллинеарными*, если они параллельны в широком смысле, т.е. расположены на параллельных прямых или на одной и той же прямой.

Теорема. Два ненулевых вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. $\vec{b} = k\vec{a}$.

Определение. Три ненулевых вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости или лежат в ней.

Теорема. Три ненулевых вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других, например, $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Линейная зависимость векторов. Базис.

Определение. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и линейная комбинация равна нулю, т.е. $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$. В противном случае система называется *линейно независимой*.

Определение. Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве называется *базисом*.

Декартовы прямоугольные координаты.

Пусть Ox , Oy , Oz – три взаимно перпендикулярных оси в трехмерном пространстве (оси координат), исходящие из общей точки O (начало координат). Три взаимно перпендикулярных плоскости Oxy , Oyz , Oxz проходящие через соответствующие оси, называются *координатными плоскостями*.

Для каждой точки M пространства существует ее *радиус-вектор* $\vec{r} = \overline{OM}$, начало которого есть начало координат O и конец которого есть данная точка M .

Определение. *Декартовыми прямоугольными координатами* x, y, z точки M называются проекции ее радиус-вектора \vec{r} на соответствующие оси координат. Обозначение: $M(x, y, z)$, x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата точки M .

$$\text{Модуль радиус-вектора } |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Определение. Пусть в пространстве $Oxyz$ задан вектор \vec{a} . Проекции этого вектора на оси координат называются *координатами вектора* $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.

$$\text{Длина вектора } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Если ввести единичные векторы (орты) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные по осям координат, то получим *координатную форму вектора* $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

Скалярное произведение векторов.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$.

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (условие перпендикулярности).
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
3. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$.
4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Если векторы $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ представлены своими координатами, то скалярное произведение равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Из этой формулы следует формула для вычисления косинуса угла между векторами $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Векторное произведение.

Определение. Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}] \equiv \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) длина вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , т.е. $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$,
- 2) вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} ,
- 3) упорядоченная тройка \vec{a}, \vec{b} и $[\vec{a}, \vec{b}]$ правая.

Свойства:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0$ (условие параллельности).
2. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
3. $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$.
4. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

Если векторы $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ заданы своими координатами, то векторное произведение можно записать в виде:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение.

Определение. Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} , взятому со знаком «+», если векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} образуют правую тройку, и со знаком «-», если левую.

Теорема. Для того чтобы три вектора \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно 0.

Основное алгебраическое свойство смешанного произведения в том, что циклическая перестановка векторов не меняет его величины, т.е. $\vec{abc} = \vec{cab} = \vec{bca}$.

Смешанное произведение в координатной форме имеет вид:

$$\vec{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

III. Элементы аналитической геометрии

Основные виды уравнений прямой на плоскости.

- 1) $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой.
- 2) $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{N}(A, B)$.
- 3) $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}$ – каноническое уравнение прямой – уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s}(m, n)$.
- 4) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.
- 5) $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α – угол наклона к оси Ox), b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy .
- 6) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{st}$ – векторное уравнение прямой, где $\vec{r}(x, y)$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y)$ на прямой, $\vec{r}_0(x_0, y_0)$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на прямой, $\vec{s}(m, n)$ – направляющий вектор прямой.
- 7) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, t \in (-\infty; +\infty)$ – параметрическое уравнение прямой.
- 8) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox , b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy .

Угол между двумя прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется по формуле $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $1 + k_1k_2 = 0$.

Расстояние d между двумя точками на плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты середины отрезка M_1M_2 находятся по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Основные виды уравнений плоскости.

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости;

2) $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{N}(A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках, где a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно;

4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Основные виды уравнений прямой в пространстве.

1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – общее уравнение прямой, как пересечение

двух плоскостей, где направляющий вектор прямой находится из векторного произведения нормальных векторов этих плоскостей

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

2) $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ – каноническое уравнение прямой или уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно вектору $\vec{s}(m, n, p)$.

3) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

4) $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{st}$ – векторное уравнение прямой, где $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ – радиус-вектор точки, лежащей на прямой, $\vec{s}(m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$5) \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \text{ – параметрическое уравнение прямой.}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между двумя прямыми, заданными в канонической форме $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{n_2} = \frac{z-z_1}{p_2}$, определяется как угол между их направляющими векторами:

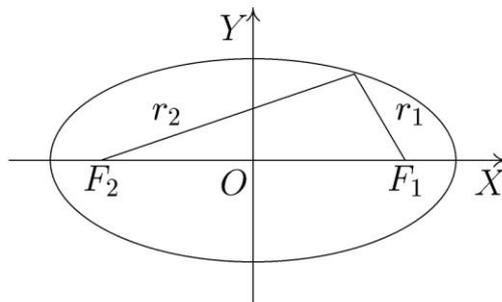
$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Угол между прямой $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{mA + nB + pC}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Кривые второго порядка.

Определение. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная.



Уравнение эллипса вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется *каноническим уравнением* эллипса.

Точки, в которых эллипс пересекает оси, называются *вершинами* этого эллипса. Координаты вершин: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$.

Число a называют *большой полуосью*, а b – *малой полуосью* эллипса.

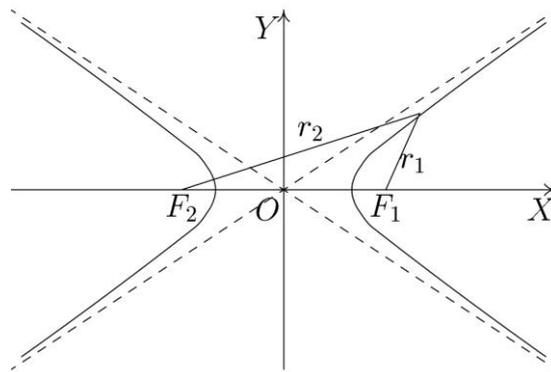
Обычно предполагается $a > b > 0$. При условии $a = b$ получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$. Если $b > a$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси, $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Эксцентриситет эллипса удовлетворяет условию $0 \leq \varepsilon < 1$, причем в случае, когда эксцентриситет равен нулю, имеем окружность.

Определение. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.



Уравнение гиперболы вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется *каноническим уравнением* гиперболы. Здесь $b^2 = c^2 - a^2$.

Величины a и b называются, соответственно, *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат.

Точки $(\pm a, 0)$ называются *вершинами* гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты: $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$.

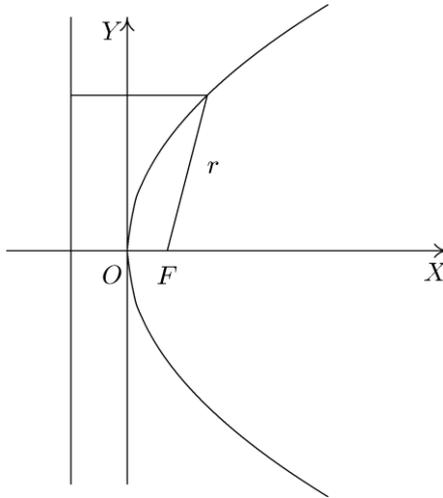
Гипербола называется *равносторонней*, если $a = b$.

Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид $x^2 - y^2 = a^2$, асимптоты равносторонней гиперболы $y = \pm x$.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Эксцентриситет гиперболы больше единицы, $\varepsilon > 1$, причем эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$.

Определение. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до точки F , называемой *фокусом*, равно расстоянию до данной прямой l , называемой *директрисой*, не проходящей через точку F .



Если выбрать систему координат так, чтобы директрисой параболы была прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, то уравнение параболы примет вид: $y^2 = 2px$ – каноническое уравнение параболы.

Уравнение $x^2 = 2py$ задает параболу, симметричную относительно оси ординат. При $p > 0$ ветви параболы обращены в положительную сторону соответствующей оси, а при $p < 0$ – в отрицательную.

Эксцентриситет параболы считается равным единице, $\varepsilon = 1$.

Полярные координаты.

Определение. Говорят, что на плоскости введена *полярная система координат*, если заданы:

- 1) некоторая точка O , называемая *полюсом*;
- 2) некоторый луч, исходящий из точки O и называемый *полярной осью*.

Полярными координатами точки $M \neq O$ называются два числа: *полярный радиус* $r(M) = |\overline{OM}| > 0$ и *полярный угол* φ – угол, на который следует повернуть полярную ось, чтобы ее направление совпало с направлением вектора \overline{OM} .

Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

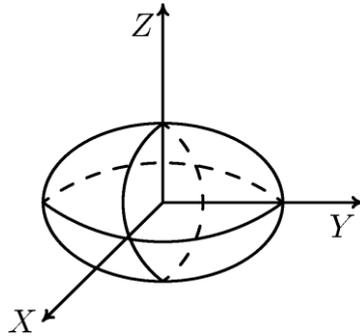
Поверхности второго порядка.

Определение. Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, удовлетворяющих уравнению:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид:

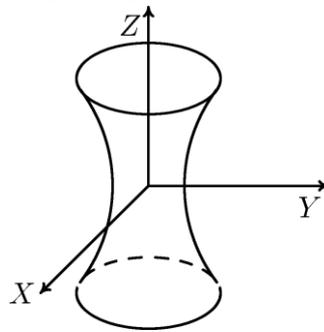
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Положительные числа a , b , c называются *полуосями* эллипсоида.

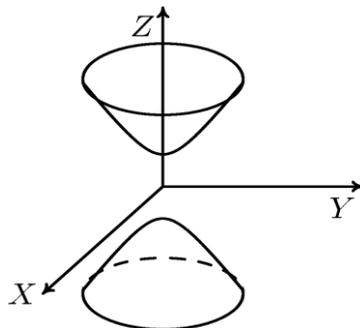
Однополостный гиперболоид имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Двуполостной гиперболоид имеет каноническое уравнение:

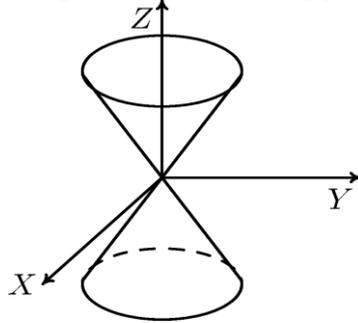
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Конус имеет каноническое уравнение:

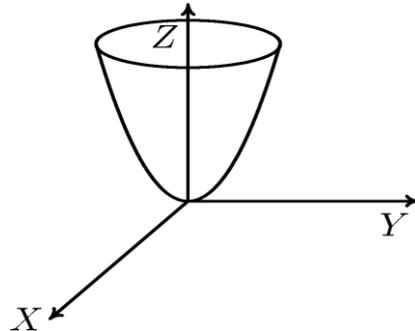
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

и при $a = b$ является конусом вращения, или круговым конусом.



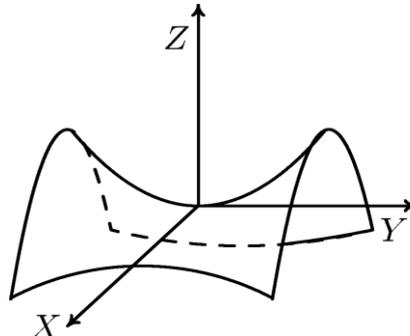
Эллиптический параболоид имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$



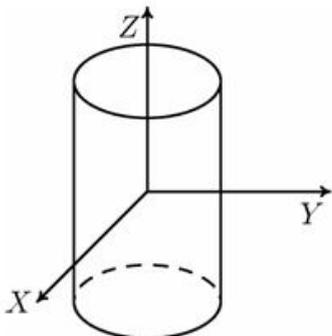
Гиперболический параболоид имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$



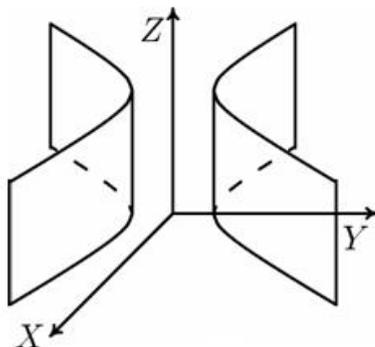
Каноническое уравнение *эллиптического цилиндра* имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



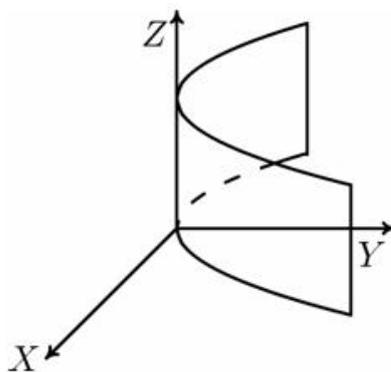
Каноническое уравнение *гиперболического цилиндра* имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



Каноническое уравнение *параболического цилиндра* имеет вид:

$$y^2 = 2px.$$



IV. Введение в анализ.

Элементарные функции.

Определение. Если каждому значению переменной x , принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y , то y есть *функция* от x или $y = f(x)$. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Совокупность значений x , для которых определяются значения функции y , называется *областью определения функции*.

Основные элементарные функции:

Степенная функция	$y = x^a$	a - действительное число
Показательная функция	$y = a^x$	$a > 0, a \neq 1$
Логарифмическая функция	$y = \log_a x$	$a > 0, a \neq 1$
Тригонометрические функции	$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x.$	
Обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$	

Определение. Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента x соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*. Аналогичным образом определяется *убывающая функция*.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное число T , от прибавления (или вычитания) которого к аргументу x значение функции не изменяется: $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее такое число называется *периодом* функции.

Функции $y = \sin x, y = \cos x$ имеют период $T = 2\pi$. Функции $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ имеют период $T = \pi$.

Определение. Если функция может быть представлена в виде $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то функция $y = f[\varphi(x)]$ называется *сложной функцией* от x . Здесь u называется *промежуточным аргументом*, x – *независимым аргументом*.

Если известен график функции $y = f(x)$, то с его помощью можно получить графики следующих функций.

$f(ax)$	$a > 0$, сжатие графика вдоль оси x в a раз (при $0 < a < 1$, получаем растяжение в $\frac{1}{a}$ раз)
$f(-x)$	отображение симметрично относительно оси y
$f(x+b)$	перенос параллельно оси x на отрезок длины $ b $ влево, если $b > 0$, и вправо, если $b < 0$
$kf(x)$	$k > 0$, растяжение вдоль оси y в k раз (при $0 < k < 1$, получаем сжатие в $\frac{1}{k}$ раз)
$-f(x)$	Отображение симметрично относительно оси x
$f(x) + c$	перенос параллельно оси y на отрезок длины $ c $ вверх, если $c > 0$, и вниз, если $c < 0$

Предел функции.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a . Число A называется *пределом функции $f(x)$* при $x \rightarrow a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Аналогичные определения можно дать, когда a или A равны нулю или бесконечности.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* в окрестности точки a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Функция $A(x)$ называется *бесконечно большой* в окрестности точки a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} A(x) = \infty.$$

Свойства бесконечно-малых и бесконечно-больших величин.

Пусть $C \neq 0$ и α, β и γ – бесконечно-малые величины, то

1. $\frac{C}{0} = \infty, \quad \frac{C}{\infty} = 0$;
2. $\alpha + \beta = \gamma, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm C = \infty$;
3. $\alpha \cdot \beta = \gamma, \quad \alpha \cdot C = \beta$ или $0 \cdot C = 0, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty \cdot C = \infty$.

Свойства пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} [Cf(x)] = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$,
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$,
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$.

Неопределенности.

При вычислении пределов $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ встречаются два случая.

- 1) Функция $f(x)$ определена в предельной точке a , тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- 2) Функция $f(x)$ не определена в предельной точке a . В этом случае мы будем иметь дело с так называемыми *неопределенностями*: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty$ и т.п.

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. Рассмотрим пределы вида

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. В этом случае можно

воспользоваться следующим правилом: *сумма конечного числа бесконечно*

больших функций различных порядков эквивалентна слагаемому высшего порядка.

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Рассмотрим пределы вида $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. В этом случае числитель и знаменатель можно разложить на множители.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Из этого предела также вытекает:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел (раскрытие неопределенности вида 1^∞):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,718\dots$$

Его также записывают в виде:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Из второго замечательно предела вытекает:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Определение. Две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* в окрестности точки x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

В этом случае пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Тогда в вычислениях пределов вместо одной бесконечно-малой величины можно брать другую эквивалентную бесконечно-малую величину.

Таблица эквивалентностей.

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно-малая величина в окрестности точки x_0 . Тогда

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| 1. $\sin \alpha \sim \alpha$, | 2. $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$, | 3. $\arcsin \alpha \sim \alpha$, |
| 4. $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$, | 5. $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$, | 6. $e^\alpha - 1 \sim \alpha$. |

Непрерывность функции.

Определение. Число A_+ называется *правосторонним пределом* функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если этот предел существует, когда x стремится к a , оставаясь больше a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a+0 \\ (x > a)}} f(x) = A_+.$$

Аналогично определяется *левосторонний предел* функции:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ (x < a)}} f(x) = A_-.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если:

- 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 ,
- 2) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
- 3) этот предел равен значению функции в точке x_0 , т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т.п.), то она называется *непрерывной в этой области*.

Свойства непрерывных функций.

1. Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

3. Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Классификация точек разрыва.

Определение. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается хотя бы одно условие непрерывности функции.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, т.е. если левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то x_0 является *точкой устранимого разрыва*. Разрыв можно устранить, полагая $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, но оба предела существуют и конечны, то x_0 называется *точкой разрыва I рода*. В этом случае разность $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ называется *скачком функции* в точке x_0 .

Определение. Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов или предел равен бесконечности, то x_0 называется *точкой разрыва II рода*.

V. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции имеет несколько обозначений: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x . *Дифференцированием* называется операция нахождения производной функции.

Геометрический смысл производной.

Пусть $y = f(x)$ - уравнение некоторой кривой, а $M(x_0, y_0)$ – точка, лежащая на этой кривой.

Значение производной от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к данной кривой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$.

Другими словами, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между касательной к данной кривой, проведённой через точку M_0 , и положительным направлением оси Ox , отсчитываемый против часовой стрелки.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ кривой, имеет вид:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Определение. *Нормалью* MN к кривой в данной её точке $M(x_0, y_0)$ называется перпендикуляр к касательной, проведённый через точку касания. Уравнение нормали записывается так:

$$y = y_0 + \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Физический смысл производной.

Для функции $y = f(x)$, зависящей от времени x , производная y'_x есть скорость изменения функции y в данный момент времени x .

В частности, если тело движется прямолинейно и закон движения задан формулой $s = s(t)$, то скорость тела в данный момент времени определяется соотношением $v = s'(t)$.

Основные правила дифференцирования.

1. $(u + v)' = u' + v'$	2. $(Cu)' = Cu'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$	4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x$	6. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$

Определение. Пусть зависимость между x и y задана *параметрически* в виде двух уравнений:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

где t – вспомогательная переменная, называемая *параметром*. Производная от такой функции может быть найдена по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Определение. Функция y от аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x, y(x)) = 0$, неразрешённым относительно зависимой переменной. В этом случае применяют правило дифференцирования сложной функции.

Определение. Функция вида $y = u(x)^{v(x)}$ называется *сложно-показательной*. При вычислении производной сложно-показательной функции следует функцию предварительно прологарифмировать, а затем уже искать производную. Такой приём называется *логарифмическим дифференцированием*.

Таблица производных основных элементарных функций.

$c' = 0, c = const$	$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Q}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Определение. Производной n -го порядка назовём производную от производной $(n-1)$ -ого порядка, т. е.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x) \right)'.$$

Дифференциал функции.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется линейная часть приращения дифференцируемой функции $f(x)$ и обозначается dy и определяется соотношением:

$$dy = f'(x)dx.$$

Вычисление пределов с помощью дифференцирования.

Правило Лопиталья применяется для раскрытия неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть при $x \rightarrow a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ обе бесконечно малые или бесконечно большие. Тогда предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует (в указанном смысле):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Неопределенности вида $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$ можно свести к неопределенности вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ или $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

Неопределенности вида $\{0^0\}$, $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$ возникают при рассмотрении пределов функций вида $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Эти неопределенности с помощью тождества $\ln y = \ln f(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x) \ln f(x)$, сводятся к неопределенности вида $\{0 \cdot \infty\}$.

Исследование функции методами дифференциального исчисления.

Определение. Если функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и $f'(x) \geq 0$ (или $f'(x) \leq 0$), то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a,b) . Максимум и минимум функции называются *экстремумом функции*.

Необходимое условие экстремума функции. Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то её производная в этой точке равна нулю или не существует. Точка x_0 , в которой производная функции равна нулю или не существует, называется *критической*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточное условие экстремума функции. Если при переходе через критическую точку слева направо $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка есть *точка максимума* функции, а если $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», то эта точка есть *точка минимума* функции. Если производная знака не меняет, то экстремума нет.

Определение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Такая функция достигает своих *наибольшего* и *наименьшего* значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a,b]$, либо на границе отрезка, т.е. при $x = a$ или $x = b$. Если $x_0 \in (a,b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a,b]$:

- 1) найти критические точки функции на интервале (a,b) ;
- 2) вычислить значения функции $f(x)$ в найденных критических точках;
- 3) вычислить значения функции $f(x)$ на концах отрезка, т.е. в точках $x=a$ и $x=b$;
- 4) среди всех вычисленных значений функции $f(x)$ выбрать наибольшее и наименьшее.

Определение. Говорят, что кривая *вогнутая* на интервале (a,b) , если она лежит выше касательной, проведенной в любой её точке. Говорят, что кривая *выпуклая* на интервале (a,b) , если она лежит ниже касательной, проведенной в любой её точке.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции. Если $f''(x) \geq 0$ на (a,b) , то график функции является вогнутым на этом интервале, если $f''(x) \leq 0$ на (a,b) , то график функции является выпуклым на этом интервале.

Определение. Точка кривой, отделяющая её выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба*. При переходе через точку перегиба вторая производная меняет знак.

Определение. Асимптотой кривой $y = f(x)$ называется прямая, к которой приближается график функции при неограниченном удалении от начала координат. Различают асимптоты вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если при $x \rightarrow a$ (слева или справа) значение функции стремится к бесконечности, т.е. выполнено одно из следующих условий:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty.$$

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если существует предел:

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Схема построения графика функции.

- I.** а) Найти область определения функции.
б) Установить чётность, нечётность, периодичность функции.
в) Определить точки пересечения графика функции с осями координат.
г) Определить интервалы непрерывности функции и найти точки разрыва.
- II.** Определить интервалы монотонности (возрастания, убывания) функции и найти ее точки экстремума.
- III.** Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и найти точки перегиба.
- IV.** Найти асимптоты графика функции.
- V.** Построить график функции.

VI. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* по отношению к функции $f(x)$ на некотором промежутке (a,b) , если на этом промежутке функция $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению:

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx.$$

Если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на интервале (a,b) , то все ее первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Определение. Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

т. е. неопределенный интеграл от функции $f(x)$ есть множество всех её первообразных. При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной*, а произведение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, $F(x)$ – одна из *первообразных*, x – *переменная интегрирования*. Процесс нахождения первообразной называется *интегрированием*.

Теорема (существование неопределенного интеграла). Если функция $f(x)$ непрерывна на (a,b) , то существует первообразная, а значит, и интеграл $\int f(x)dx$.

Свойства неопределенных интегралов.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int (C_1f_1(x) + C_2f_2(x))dx = C_1\int f_1(x)dx + C_2\int f_2(x)dx$, $C_1, C_2 = const$.
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C$, $(a \neq 0)$.

Таблица основных неопределенных интегралов.

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{xdx}{A + x^2} = \frac{1}{2} \ln A + x^2 + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{x-a}{x+a}\right + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln x + \sqrt{x^2 + A} + C$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{A \pm x^2}} = \pm\sqrt{A \pm x^2} + C$

Методы интегрирования.

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью таблицы интегралов и основных свойств неопределенных интегралов.

2. Метод замены переменной. Введение новой переменной интегрирования позволяет свести вычисление данного интеграла к нахождению табличного.

Положим $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция. Учтём, что дифференциал вычисляется по формуле:

$$dx = \varphi'(t)dt.$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

После вычисления интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ нужно перейти к переменной x .

3. Интегрирование по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке и существует $\int u'(x)v(x)dx$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du .$$

Интегрирование рациональных функций.

Определение. Функция $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степени n и m , называется *рациональной дробью*. Если степень многочлена $P_n(x)$ больше или равна степени многочлена $Q_m(x)$ ($n \geq m$), то рациональная дробь называется *неправильной*, а если меньше ($n < m$) – *правильной*.

Всякую неправильную несократимую рациональную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = W_{n-m} + \frac{T(x)}{Q_m(x)},$$

где $W_{n-m}(x)$ – многочлен степени $n - m$, $T(x)$ – остаток от деления, $\frac{T(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Разложим знаменатель на множители:

$$Q_m(x) = a_n(x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s} .$$

И тогда правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

$$\begin{aligned} \frac{T(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(x - \alpha_1)^{r_1}} + \\ &+ \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_{r_2}}{(x - \alpha_2)^{r_2}} + \dots + \\ &+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{M_{l_1}x + N_{l_1}}{(x^2 + p_{l_1}x + q_{l_1})^{l_1}} + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты A_i, B_i, M_i, N_i находим, приводя дроби к общему знаменателю. Различают 4 типа простейших дробей:

$$\text{I тип: } \int \frac{Adx}{x-a} = A \ln|x-a| + C,$$

$$\text{II тип: } \int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C,$$

$$\text{III тип: } (p^2 - 4q < 0)$$

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C,$$

$$\text{IV тип: } (p^2 - 4q < 0)$$

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{(t^2+a^2)^k} dt = A \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

где $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, $t = x + \frac{p}{2}$, причем:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C,$$

а для второго интеграла существует рекуррентная формула:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} J_{k-1}.$$

Интегрирование тригонометрических функций.

При вычислении интегралов вида:

$$\int \cos^m x \sin^n x dx,$$

следует преобразовать подынтегральную функцию, используя различные тригонометрические формулы.

Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное положительное, то применяют подстановку $\cos x = t$, если n – нечётное и $\sin x = t$, если m – нечётное. При этом используется основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Если m или n – чётные положительные числа, то применяются тригонометрические формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Если $m + n$ – чётное отрицательное число, то применяют подстановку $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$.

При вычислении интегралов вида:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx, \quad \int \operatorname{ctg}^n x dx$$

следует преобразовать подынтегральную функцию, используя следующие тригонометрические формулы:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Интегралы вида:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t универсальной тригонометрической подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. При этом используются формулы:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Определенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Этот отрезок разделим на n произвольных, необязательно равных, частей:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

В этом случае говорят, что *произведено разбиение отрезка $[a, b]$* . На каждом участке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку c_i и вычислим значение функции $f(x)$ в этих точках. Если умножить полученные значения функции $f(c_i)$ на длину соответствующего участка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммировать все эти выражения, то получим сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

которая называется *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* . Обозначим через $\Delta x = \max \Delta x_i$.

Определение. Если предел последовательности интегральных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

существует, т.е. конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек c_i на соответствующих участках, то этот предел называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Здесь число a называется *нижним пределом*, число b называется *верхним пределом* интеграла.

Определение. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, если для этой функции на указанном отрезке существует предел интегральных сумм, т.е. определенный интеграл.

Необходимое условие интегрируемости: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Достаточное условие интегрируемости: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, или имеет конечное число точек разрыва 1-го рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

$$1. \int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)] dx = C_1 \int_a^b f_1(x) dx + C_2 \int_a^b f_2(x) dx.$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$4. \text{ Если функция } f(x) \text{ – четная, то } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ если функция } f(x) \text{ –}$$

$$\text{нечетная, то } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Формула Ньютона-Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то имеет место следующая формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Методы вычисления определенного интеграла.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, где $a = \varphi(t_1)$ и $b = \varphi(t_2)$, то имеет место формула, дающая возможность производить замену переменной в определённом интеграле:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то имеет место формула:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du ,$$

которую называют *формулой интегрирования по частям*.

Приложение определенного интеграла.

Пусть плоская фигура на отрезке $[a, b]$ ограничена графиками двух функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$. Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx .$$

Несобственные интегралы.

Определение. Если пределы интегрирования a и b являются конечными и подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, то в этом случае интеграл называют *собственным*. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то интеграл называют *несобственным*. Существует два вида несобственных интегралов: интегралы с бесконечными пределами интегрирования и интегралы от неограниченных функций.

1. Интегралы с бесконечными пределами.

Определение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при любом $x \geq a$. Тогда Выражение вида:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

называют *несобственным интегралом I рода*. Если предел конечный, то интеграл называют *сходящимся*, а если предел равен бесконечности или не существует – *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами.

2. Интегралы от неограниченных функций.

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < c$ и $c < x \leq b$, а в точке c терпит разрыв, то несобственный интеграл называется *несобственным интегралом II рода* от этой функции и определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если пределы конечны, то несобственный интеграл называют *сходящимися*, в противном случае – *расходящимися*.

VII. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

Функции нескольких переменных.

Определение. Если по некоторому вполне определенному закону упорядоченным парам чисел (x, y) из некоторого множества D ставится в соответствие вполне определенное значение z , то переменная z называется *функцией двух переменных* x и y , и обозначается $z = f(x, y)$ или $z = g(x, y)$. Переменные x и y называются *независимыми переменными* или *аргументами*. Если паре чисел (x_0, y_0) соответствует число z_0 , то оно называется *значением функции* $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и обозначается $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Определение. Множество пар (x, y) для которых определено значение функции $z = f(x, y)$, называется *областью определения* данной функции.

Определение. Круг радиуса δ с центром в точке P_0 называется δ -*окрестностью* точки P_0 .

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ (при стремлении точки $P(x, y)$ к точке $P_0(x_0, y_0)$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(P) - A| < \varepsilon$ для всех $P(x, y)$ из δ -окрестности точки P_0 . Обозначается

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

На функции двух переменных легко переносятся все положения теории пределов функции одной переменной. В частности, свойства пределов.

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной* в точке $P_0(x_0,y_0)$, если она определена в точке $P_0(x_0,y_0)$ и некоторой ее окрестности, а так же

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

Разрыв функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0,y_0)$ может произойти по следующим причинам:

- 1) если функция определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$, но не определена в самой этой точке;
- 2) если функция определена в точке $P_0(x_0,y_0)$ и ее окрестности и не имеет предела при стремлении точки $P(x,y)$ к $P_0(x_0,y_0)$;
- 3) если функция, определенная в точке $P_0(x_0,y_0)$ и ее окрестности, имеет предел в точке $P_0(x_0,y_0)$, отличный от значения функции в этой точке.

Обобщая понятие функции двух переменных, сформулируем определение функции любого конечного числа переменных.

Определение. Если упорядоченному набору n действительных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) по определенному правилу или закону (обозначим его символом f) единственным образом соответствует действительное число y , то говорят, что y является *функцией n переменных* и пишут $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Наборы (x_1, x_2, \dots, x_n) принято называть точками n -мерного пространства и обозначать $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P)$. Принимая это во внимание, можно дословно переносить все определения для функции двух переменных на функции произвольного числа переменных. Например, *областью определения функции* $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P)$, называется множество всех тех точек P n -мерного пространства, для которых функция определена, а график – множество точек $(x_1, x_2, \dots, x_n, f(P))$ $(n + 1)$ -мерного пространства. При $n \geq 2$ функция $y = f(P)$ не имеет геометрического истолкования, хотя при $n = 3$ область определения $y = f(P)$ представляет собой некоторое множество точек трехмерного пространства.

Частные производные.

Определение. *Частной производной функции* $f(x, y)$ по переменной x называется предел отношения соответствующего частного приращения

функции к приращению аргумента x при условии, что приращение аргумента стремится к нулю произвольным образом, т. е.

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Частная производная по переменной x сама является функцией двух переменных, которая определена во всех точках плоскости, где существует этот предел.

Аналогично определяют и обозначают частную производную функции $f(x, y)$ по аргументу y :

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Определение частной производной переносится на функции любого конечного числа переменных. Например, частная производная по переменной x_i ($1 \leq i \leq n$) для $u = f(P)$, где $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяется равенством:

$$f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

При нахождении частной производной применимы все формулы и правила дифференцирования функции одной переменной, так как по определению мы фиксируем все переменные, кроме одной, и фактически имеем дело с функцией одной переменной. Если, например, находим производную по x_i , то все остальные аргументы рассматриваем как константы.

Полный дифференциал функции нескольких переменных.

Определение. Полным дифференциалом функции двух переменных $f(x, y)$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно Δx и Δy , т. е.

$$df(x, y) = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y.$$

Приращения Δx и Δy независимых переменных x и y функции $f(x, y)$ (как и в случае функции одной переменной) будем называть их

дифференциалами обозначать dx и dy , соответственно. Тогда выражение полного дифференциала примет вид:

$$df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Предыдущие рассуждения и определения соответствующим образом обобщаются на функции любого конечного числа переменных. Например, полный дифференциал функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяется равенством:

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} dx_n.$$

Все известные правила нахождения дифференциалов остаются справедливыми для функций нескольких переменных.

Производная сложной функции.

Определение. Пусть дана функция $f(u, v)$, (аргументы которой u и v – функции других переменных x и y):

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Тогда функция $f(u(x, y), v(x, y)) = F(x, y)$ называется *сложной функцией переменных x, y* .

Теорема. Если $f(u, v)$ – сложная функция, $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$ – дифференцируемые функции, то частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют

и находятся по следующим формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Производная неявной функции.

Обобщим понятие неявно заданной функции на случай нескольких переменных. Будем говорить, что функция двух переменных $z = f(x, y)$ *неявно* задана в некоторой области D переменных (x, y) соотношением $F(x, y, z) = 0$, если она в области D обращает уравнение в тождество, т. е.

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0.$$

Теорема. Пусть функция $F(x, y, z)$ и ее частные производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Если $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки (x_0, y_0) , где уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет единственную непрерывную и дифференцируемую неявную функцию $z = f(x, y)$ такую, что $f(x_0, y_0) = z_0$ и $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$.

Формулы для нахождения частных производных неявной функции:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

В общем случае, когда уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ определяет y как неявную функцию от переменных x_1, x_2, \dots, x_n справедливы аналогичные формулы:

$$\frac{\partial y(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}{F'_y(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}.$$

Частные производные высших порядков.

Определение. Частная производная (если она существует) от частной производной первого порядка функции $f(x, y)$ называется *частной производной второго порядка*.

Дифференцируя $f'_x(x, y)$ по x и по y , получим две частные производные второго порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial f'_x(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f'_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y).$$

Аналогично для $f'_y(x, y)$:

$$\frac{\partial f'_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f'_y(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Определение. Производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ называются *смешанными производными*.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ и ее частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ определены и непрерывны в точке $P(x, y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке справедливо равенство:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Определение. *Частной производной порядка n функции $f(x, y)$* называется первая производная от частной производной $(n-1)$ -ого порядка данной функции.

Для функции любого конечного числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Необходимое и достаточное условия существования экстремумов.

Определение. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума функции $f(x, y)$* , а значение $f(P_0)$ – *максимумом* (максимальным значением), если существует окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$, для всех точек $P(x, y)$ которой, отличных от точки $P_0(x_0, y_0)$, выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P).$$

Определение. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется *точкой минимума функции $f(x, y)$* , а значение $f(P_0)$ – *минимумом* (минимальным значением), если существует окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$, для всех точек $P(x, y)$ которой, отличных от точки $P_0(x_0, y_0)$, выполняется неравенство

$$f(P_0) < f(P).$$

Точки максимума и минимума функции $f(x, y)$ называются *экстремальными точками*, или *экстремумами*, а значения функции в этих точках *экстремальными значениями*.

Отметим, что понятия экстремумов – локальные понятия. В связи с этим точки экстремумов часто называют точками локального экстремума. Точки локального экстремума не следует смешивать с точками, в которых функция достигает наибольшего и наименьшего значения.

Как и в случае функции одной переменной, возникает задача о нахождении необходимых и достаточных условий существования экстремумов. Сформулируем их для функций двух независимых переменных.

Теорема (необходимые условия существования экстремума). Если функция $f(x,y)$ в точке имеет экстремум, то в этой точке обе частные производные равны нулю $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ или, по крайней мере, одна из них не существует.

Определение точек экстремума и необходимые условия существования экстремума остаются справедливыми и для функций большего числа переменных.

Определение. Точки, в которых все частные производные первого порядка функции $f(P)$ равны нулю или хотя бы одна из них не существует, называются *критическими* точками. Если в критической точке функция дифференцируема, то все частные производные первого порядка в ней обращаются в нуль. Такую точку часто называют *стационарной*.

Для отыскания стационарных точек функции $z = f(x, y)$ например, находят частные производные первого порядка и решают систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Любая точка экстремума является критической точкой функции, но не всякая критическая точка является точкой экстремума, т. е. необходимые условия теоремы не являются достаточными условиями существования экстремума.

Теорема (достаточные условия существования экстремума). Пусть функция $f(x,y)$ в стационарной точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Если $A = f''_{xx}(P_0)$, $B = f''_{xy}(P_0)$, $C = f''_{yy}(P_0)$ и $\Delta(P_0) = AC - B^2$, то возможны три случая:

- 1) при $\Delta(P_0) > 0$ P_0 – точка экстремума, причем, в точке P_0 максимум, когда $A < 0$, и минимум, когда $A > 0$;
- 2) при $\Delta(P_0) < 0$ P_0 не является точкой экстремума;
- 3) при $\Delta(P_0) = 0$ о характере стационарной точки P_0 никакого заключения сделать нельзя, нужны дополнительные исследования.

Замечание. Приведенные выше условия эквивалентны следующим. Пусть P_0 – стационарная точка функции $f(x, y)$, т. е. $df(P_0) = 0$, тогда:

- 1) если $d^2f(P_0) < 0$ при $dx^2 + dy^2 \neq 0$, то $f(P_0)$ – максимум $f(x, y)$,
- 2) если $d^2f(P_0) > 0$ при $dx^2 + dy^2 \neq 0$, то $f(P_0)$ – минимум $f(x, y)$,
- 3) если $d^2f(P_0)$ меняет знак, то $f(P_0)$ не является экстремумом.

VIII. Интегральное исчисление функции нескольких переменных.

Двойной интеграл.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy . Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей, имеющих площади $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ с диаметрами d_1, d_2, \dots, d_n (диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на площадь этой области.

Определение. *Интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ по области D называется сумма вида:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1) \Delta\sigma_1 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \Delta\sigma_n.$$

Определение. Если при $\max d_k \rightarrow 0$ интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий от способа разбиения D на элементарные области и от выбора точек P_k в пределах каждой из них, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

Теорема (о существовании двойного интеграла). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D , то существует предел последовательности интегральных сумм, и этот предел не зависит ни от способа разбиения области D , ни от выбора точек P_k внутри элементарных областей.

Основные свойства двойного интеграла.

$$1. \iint_D f_1(x, y) d\sigma \pm \iint_D f_2(x, y) d\sigma = \iint_D f_1(x, y) d\sigma \pm \iint_D f_2(x, y) d\sigma .$$

$$2. \iint_D cf(x, y) d\sigma = c \iint_D f(x, y) d\sigma, \quad c = \text{const} .$$

3. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2 , то

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma .$$

4. Если $m \leq f(x, y) \leq M$, то

$$mS \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS, \quad \text{где } S \text{ – площадь области } D.$$

Вычисление двойного интеграла.

Пусть $f(x, y)$ непрерывна в области D . Различают два основных вида области интегрирования. Эти области назовем *правильными*.

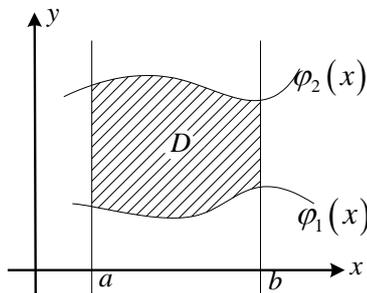


Рис.1

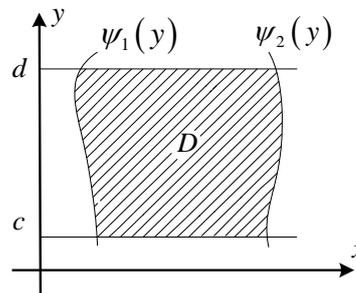


Рис.2

1. Область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, ($a < b$), а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$), каждая из которых пересекается вертикальной прямой только в одной точке (на рисунке слева). Для такой области запишем следующее выражение, которое будем называть *двукратным интегралом по области D*:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

В этом выражении сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, причем интегрирование производится по переменной y , а x считается

постоянной. В результате интегрирования получится непрерывная функция от x . Эту функцию интегрируем по x в пределах от a до b .

2. Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми $y = c, y = d, (c \leq d)$, а слева и справа – непрерывными кривыми $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y), (\psi_1(y) \leq \psi_2(y))$, каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке (на рисунке справа). Для такой области двукратный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл, в котором переменная y считается постоянной.

В общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к правильным областям.

Теорема. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по области D , т.е.:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Выбор порядка двукратного интегрирования зависит от области D , а также от подынтегральной функции.

Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть в плоскости xOy дана область D , рассмотрим переход от прямоугольных координат к криволинейным по формулам:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

где функции x и y имеют непрерывные частные производные в области D' плоскости $uO'v$. Определитель преобразования, называемый *якобианом* J , в области D' не обращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Справедлива следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv.$$

В частности, переход к полярным координатам r, φ , связанными с прямоугольными координатами соотношениями $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, осуществляется по формуле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r du dv,$$

т.к.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Двойной интеграл в полярных координатах вычисляется, так же как и двойной интеграл в прямоугольных координатах при помощи повторного интеграла.

Приложения двойного интеграла.

Из определения двойного интеграла, в случае единичной подынтегральной функции, вытекает формула площади плоской фигуры, ограниченной областью D :

$$S = \iint_D dx dy.$$

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D , вычисляется по формуле:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Если пластинка занимает область D плоскости xOy и имеет переменную поверхностную плотность $\rho = \rho(x, y)$, то масса пластинки выражается двойным интегралом:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

Тройной интеграл.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в ограниченной замкнутой пространственной области T . Разобьем область T произвольным образом на n элементарных областей T_1, T_2, \dots, T_n , с диаметрами d_1, d_2, \dots, d_n и объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. В каждой элементарной области возьмем произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на объем этой области.

Определение. *Интегральной суммой* для функции $f(x, y, z)$ по области T называется сумма вида $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k$.

Определение. Предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех элементарных областей ΔV_k называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается следующим образом:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k.$$

Теорема (о существовании тройного интеграла). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области T , то существует предел последовательности интегральных сумм. Этот предел один и тот же для любой последовательности, т. е. он не зависит от способов разбиения области T , ни от способа выбора точки P_k внутри элементарных областей.

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Вычисление тройного интеграла.

Для вычисления тройного интеграла применяется трехкратный интеграл. Знакомый нам двукратный интеграл дополняется до трехкратного внутренним интегрированием по переменной z . Внешнее двукратное интегрирование производится по области D , проекции тела T на плоскость xOy .

Определение. Пусть область интегрирования T определяется неравенствами $z_1(x, y) \leq z(x, y) \leq z_2(x, y)$, $x, y \in D$, z_1, z_2 – непрерывные функции. В свою очередь область D задаётся ограничениями $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x)$, где y_1, y_2 – непрерывные функции. Тогда тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область T , вычисляется при помощи кратных интегралов по формуле:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Замена переменных в тройном интеграле.

При вычислении тройного интеграла часто требуется перейти от переменных x, y, z к новым переменным u, v, w :

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Пусть функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка, устанавливают однозначное соответствие между точками области T пространства $Oxyz$ и точками некоторой области T' пространства $Ouvw$. Якобиан преобразования J , в области T' не обращается в нуль,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw.$$

В частности, при переходе от декартовых координат x, y, z к *цилиндрическим* координатам r, φ, z , связанным соотношениями $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$, ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty$), якобиан преобразования $J = r$ и формула преобразования тройного интеграла к *цилиндрическим координатам* имеет вид:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T'} f[r \cos \varphi, r \sin \varphi, z] r dr d\varphi dz.$$

При переходе от декартовых координат x, y, z к *сферическим координатам* r, φ, θ , связанными соотношениями $x = r \cos \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \cos \theta, z = r \sin \theta$, ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), якобиан преобразования $J = r^2 \cos \theta$, и формула преобразования тройного интеграла к *сферическим координатам* имеет вид:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T'} f[r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta] r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta.$$

Приложения тройного интеграла.

Объем тела, занимающего область T , определяется по формуле:

$$V = \iiint_T dx dy dz.$$

Если плотность тела переменная, т. е. $\rho = \rho(x, y, z)$, то масса тела, занимающего объем T , вычисляется по формуле:

$$M = \iiint_T \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Криволинейные интегралы I рода.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в точках дуги AB гладкой кривой γ на плоскости xOy . Разобьем дугу AB произвольным образом на n элементарных дуг точками $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, пусть Δs_k –

длина дуги $A_{k-1}A_k$. На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ и умножим значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ в этой точке на длину Δs_k соответствующей дуги.

Определение. *Интегральной суммой* для скалярной функции $f(x, y)$ по дуге AB называется сумма вида $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$.

Определение. *Криволинейным интегралом по дуге AB от скалярной функции $f(x, y)$ (криволинейным интегралом I рода)* называется предел интегральной суммы:

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max s_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k, \quad (ds - \text{дифференциал длины дуги}).$$

Теорема (о существовании криволинейного интеграла I рода). Если функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой AB , то интеграл $\int_{AB} f(x, y) ds$ существует независимо от способа разбиения дуги и выбора точек.

Криволинейный интеграл I рода в случае, если дуга AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, ($a \leq x \leq b$), вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx.$$

Если дуга AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Свойства криволинейного интеграла I рода.

1. $\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds$.
2. $\int_{AB} (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) ds = \int_{AB} f_1(x, y) ds \pm \int_{AB} f_2(x, y) ds$.

$$3. \int_{AB} cf(x, y)ds = c \int_{AB} f(x, y)ds, \quad c = const.$$

$$4. \text{ Если контур интегрирования } AB \text{ разбит на две части } AC \text{ и } CB, \text{ то}$$

$$\int_{AB} f(x, y)ds = \int_{AC} f(x, y)ds + \int_{CB} f(x, y)ds .$$

Аналогично определяется и вычисляется криволинейный интеграл I рода от функции трех и более переменных.

Если $f(x, y) > 0$, то криволинейный интеграл I рода $\int_{AB} f(x, y)ds$ представляет собой массу дуги AB , имеющей переменную плотность $\rho = f(x, y)$ (физическое смысл криволинейного интеграла I рода).

Криволинейный интеграл II рода.

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – координаты векторной функции $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, которые непрерывны в точках гладкой кривой AB , имеющей уравнение $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$.

Определение. Интегральной суммой для векторной функции $\vec{F}(x, y)$, называется сумма вида:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(\xi_k, \eta_k) \Delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k],$$

где Δx_k и Δy_k – проекции $\Delta \vec{r}_k$ на оси Ox и Oy .

Определение. Криволинейным интегралом от вектор-функции (криволинейным интегралом II рода) $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ по направленной дуге AB называется предел интегральной суммы:

$$\int_{AB} \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0 \\ \Delta y_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] =$$

$$= \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy .$$

Теорема (о существовании криволинейного интеграла II рода). Если функции задающие кривую AB непрерывны вместе со своими производными, то существует предел последовательности интегральных сумм. Этот предел один и тот же для любой последовательности интегральных сумм, т. е. он не зависит от способов разбиения дуги AB , ни от выбора точек.

Свойства криволинейного интеграла II рода.

1. $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$
2. $\int_{AB} (\vec{F}_1(x, y) \pm \vec{F}_2(x, y))d\vec{r} = \int_{AB} \vec{F}_1(x, y)d\vec{r} \pm \int_{AB} \vec{F}_2(x, y)d\vec{r} .$
3. $\int_{AB} c\vec{F}(x, y)d\vec{r} = c \int_{AB} \vec{F}(x, y)d\vec{r} ,$ где $c = const.$
4. Если путь интегрирования AB разбит на две части AC и CB , то
$$\int_{AB} \vec{F}(x, y)d\vec{r} = \int_{AC} \vec{F}(x, y)d\vec{r} + \int_{CB} \vec{F}(x, y)d\vec{r} .$$

Вычисление криволинейного интеграла II рода зависит от способа параметризации дуги. Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, то интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)]dx .$$

В случае, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \leq t \leq t_2$, то интеграл вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt .$$

Аналогичная формула имеет место для вычисления криволинейного интеграла II рода по пространственной кривой AB .

В тех случаях, когда криволинейный интеграл от вектор-функции \vec{F} берется по замкнутой кривой C , этот интеграл называют *циркуляцией* вектора \vec{F} по замкнутому контуру C . Существование и величина

криволинейного интеграла по замкнутому контуру $\oint_C Pdx + Qdy$ не зависят от того, какую точку контура выбрать за начало интегрирования. Направление обхода контура считается положительным, когда область, ограниченная контуром остается слева. Если путь интегрирования C есть замкнутая кривая, ограничивающая конечную область, то положительное направление – направление против хода часовой стрелки.

Физический смысл криволинейного интеграла II рода – это работа, совершаемая переменной силой $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ на криволинейном пути AB .

Формула Грина.

Связь между циркуляцией векторного поля, т.е. криволинейным интегралом II рода по замкнутой кривой, и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром, устанавливает формула Грина.

Теорема (формула Грина). Пусть контур C – граница области D , функции $P(x, y), Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в замкнутой области D (включая границу C). Справедлива *формула Грина*:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

обход контура C положительный, т.е. выбирается так, что область D остается слева.

IX. Теория функций комплексного переменного.

Алгебраическая форма комплексного числа.

Определение. *Комплексным числом* z называется пара (x, y) действительных чисел x, y , взятых в определенном порядке. Числа x и y называются *действительной (реальной)* и *мнимой* частями комплексного числа z , соответственно. Они обозначаются:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Алгебраическая форма: $z = x + iy$, где i – *мнимая единица*, удовлетворяющая условию: $i^2 = -1$.

Определение. Числа z_1 и z_2 считаются *равными* тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Определение.

1. Суммой $z_1 + z_2$ (разностью $z_1 - z_2$) называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ (z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)).$$

2. Произведением $z_1 z_2$ называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

3. Частным $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Определение. Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряжённым* комплексному числу $z = x + iy$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Определение. Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости xOy точкой с координатами (x, y) , либо вектором с началом в точке $(0,0)$ и концом в точке (x, y) . Длина полученного вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Определение. *Аргументом* комплексного числа z называется угол между данным вектором и положительным направлением оси Ox :

$$\varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Замечание. $\operatorname{Arg} z$ определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π :

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Определение. Любое комплексное число $z = x + iy$ ($z \neq 0$) можно записать в *тригонометрической форме*:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ где } r = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Показательная форма комплексного числа.

Определение. Любое комплексное число $z = x + iy$ ($z \neq 0$) можно записать в *показательной форме*:

$$z = re^{i\varphi}, \text{ где также } r = |z|, \varphi = \text{Arg}z.$$

Из тригонометрической и показательной форм записи вытекает, что при умножении (делении) комплексных чисел z и w ($w \neq 0$) их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются).

Возведение комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$ в натуральную степень n производится по формуле:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}.$$

Корень n -ой степени из числа z находится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Замечание. Чтобы извлечь корень нужно привести комплексное число к тригонометрической или показательной форме.

Функции комплексного переменного.

Определение. Говорят, что в области D комплексного переменного z задана *комплексная функция* $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно или несколько значений w . Если $z = x + iy$, а $w = u + iv$, то зависимость $w = f(z)$ можно описать двумя действительными функциями действительных аргументов:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}.$$

Например, комплексная парабола $w = z^2$ есть система:
$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}.$$

Предел и непрерывность функции комплексной переменной.

Эти понятия вводятся аналогично тому, как это делается для функции действительной переменной, необходимо лишь всюду вместо абсолютной величины писать модуль комплексного числа.

Определение. Функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет *предел* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, равный числу $w_0 = u_0 + iv_0$, если

$$\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} |f(z) - f(z_0)| = \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} |f(z) - w_0| = 0,$$

при этом пишут:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ или } \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} u(x, y) = u_0 \text{ и } \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} v(x, y) = v_0.$$

Для комплексных функций $f(z)$ и $g(z)$ имеют место теоремы о пределах, аналогичные теоремам для действительных функций.

Определение. Функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, если она определена в некоторой окрестности точки z_0 , включая и точку z_0 , и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$. Значит, непрерывность функции $f(z)$ в точке z_0 эквивалентна непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной в области* D_z , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$ непрерывных в области D_z , также являются непрерывными в этой области, а функция $\frac{f(z)}{g(z)}$ непрерывна в тех точках D_z , где $g(z) \neq 0$.

Дифференцируемость функции комплексного переменного.

Определение. Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z . Точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D . Обозначим $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Конечный предел

отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при Δz , стремящемся к нулю произвольным образом, называется *производной* функции $f(z)$ и обозначается $f'(z)$ или w' , или $\frac{dw}{dz}$, т.е.:

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} .$$

Это соотношение при $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, влечёт систему соотношений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} ,$$

называемых *условиями Коши-Римана*. Функции, для которых выполняются условия Коши-Римана называются *дифференцируемыми* в точке z .

Определение. Функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке $z \in D$, если $f'(z)$ существует как в самой точке z , так и в некоторой её окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области D* , если она аналитическая в каждой точке этой области.

Для аналитической функции $f(z)$ имеем:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} .$$

Интеграл от функции комплексного переменного.

Пусть на комплексной плоскости задана некоторая кусочно-гладкая кривая C , в каждой точке которой определена однозначная функция комплексной переменной $w = f(z)$.

Пусть a и b – концы кривой C . Разобьем дугу ab точками $z_0 = a, z_1, \dots, z_n = b$ на n дуг, на каждой из которых возьмем произвольную

точку $\xi_k \in [z_{k-1}, z_k]$, и составим для функции $f(z)$ интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k.$$

Определение. Если существует предел интегральной суммы при любом стремлении $\max \Delta z_k \rightarrow 0$, не зависящий от способа разбиения кривой C на части и выбора точек ξ_k , то он называется *интегралом* функции $f(z)$ по кривой C , и обозначается:

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max \Delta z_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k.$$

Теорема (достаточный признак существования интеграла). Если функция $f(z)$ непрерывна на кривой C , то интеграл существует.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода от действительных функций. Следовательно, этот интеграл зависит от пути интегрирования.

Если $z = x + iy$, то $dz = dx + idy$, и если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Интеграл Коши.

Определение. Область, обладающая тем свойством, что для любой замкнутой непрерывной кривой, принадлежащей области, часть плоскости, ограниченная этой кривой, принадлежит области, называется *односвязной*. Например, внутренность круга, квадрата, треугольника.

Теорема (Коши для односвязной области). Если функция $f(z)$ аналитическая в некоторой односвязной области D_z , ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром C , то интеграл не зависит от пути интегрирования, и в этом случае

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Пусть функция комплексной переменной $f(z)$ аналитическая в некоторой односвязной области D_z и C – произвольная незамкнутая кривая с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 ($z_1, z_2, C \in D$), тогда имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1), \text{ где } F'(z) = f(z).$$

Интегралы от аналитических элементарных функций вычисляются при помощи тех же формул, что и интегралы от функций действительной переменной.

Теорема (интегральная формула Коши). Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной замкнутой области $\bar{D} = D_z + C$, C – кусочно-гладкий контур, ограничивающий D_z , то для любой точки $z_0 \in D_z$ справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

С помощью этой формулы значение функции $f(z)$ внутри области D_z выражается через ее значение на границе, что невозможно для функции действительной переменной.

Следствие. Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной замкнутой области $\bar{D} = D_z + C$, то для любого натурального n справедлива формула:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Интегралы в правой части называются *интегралами Коши*. Для вычисления интегралов по замкнутым контурам формулу удобно переписать в виде:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), n=0,1,2,\dots$$

Заметим, что при $n=0$ имеет место формула:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0), \text{ при } z_0 \in D_z \\ 0, \text{ при } z_0 \notin D_z \end{cases}.$$

Х. Дифференциальные уравнения.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные или её дифференциалы. В случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = f(x, y).$$

Определение. *Решением дифференциального уравнения* называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение вместе со своей производной $\varphi'(x)$, обращает его в тождество. Если решение задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно обычно называется *интегралом*. График решения дифференциального уравнения – *интегральная кривая*.

В простейшем случае, например, когда правая часть уравнения не содержит y , получается дифференциальное уравнение вида:

$$y' = f(x).$$

Нахождение его решений есть основная задача интегрального исчисления, и все множество этих решений дается формулой:

$$y = \int f(x) dx + C, \quad \text{где } C \text{ – произвольная постоянная.}$$

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения* называется такая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении C является решением этого уравнения. Соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение дифференциального уравнения, называется *общим интегралом* этого уравнения.

Определение. *Частным решением* называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называется в этом случае *частным интегралом уравнения*.

Задача Коши.

Теорема (существование и единственности решения). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy , содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию при $x = x_0, y = y_0$.

Определение. Условие, что при $x = x_0$ функция равняется заданному числу y_0 , называется *начальным условием* и записывается: $y|_{x=x_0} = y_0$.

Определение. Задачу отыскания частного решения по начальным условиям называют *задачей Коши*.

Общему решению дифференциального уравнения соответствует семейство интегральных кривых. Задание начального условия $y|_{x=x_0} = y_0$ означает задание точки $P_0(x_0, y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая, соответствующая искомому частному решению. Таким образом, отыскание частного решения по начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$ геометрически означает, что из семейства интегральных кривых выбираем ту, которая проходит через точку $P_0(x_0, y_0)$. Согласно теореме существования и единственности решения через каждую точку, в которой функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны, проходит единственная кривая.

Определение. Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной, включая $\pm \infty$, называется его *особым решением*.

Через каждую точку кривой, изображающей особое решение, проходит, по крайней мере, по две интегральные кривые, т. е. в каждой точке особого решения нарушается условие единственности решения.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение первого порядка вида:

$$y' = f_1(x)f_2(y).$$

Разделив обе части уравнения на $f_2(y)$ и умножив на dx , будем иметь

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя левую часть по y , а правую – по x , получим:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

При делении на $f_2(y)$ возможна потеря решений $f_2(y) = 0$.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

С помощью замены, вводимой по формуле $u(x) = \frac{y}{x}$, где $u(x)$ – неизвестная функция, однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и её производной (т. е. содержит y и y' в первой степени) и имеет вид:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции от x (или постоянные).

В частности, уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется линейным без правой части или *линейным однородным*.

В линейном однородном уравнении $y' + p(x)y = 0$ переменные разделяются, и поэтому его интегрирование сводится к вычислению интегралов от обеих частей равенства:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C.$$

Для того чтобы решить уравнение при $q(x) \neq 0$, положим $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Подставив значения y и y' в исходное уравнение и перегруппировав, получим:

$$v(x)(u'(x) + p(x)u(x)) + u(x)v'(x) = q(x).$$

Так как, y это произведение двух функций, то одна из них может быть выбрана произвольно, другая же должна определяться уравнением. Выберем $u(x)$ так, чтобы $u'(x) + p(x)u(x) = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдем простое частное решение и, подставив в уравнение $u(x)v'(x) = q(x)$, найдем $v(x)$.

Уравнение Бернулли.

Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$ (в противном случае получилось бы линейное уравнение).

Как и линейное, уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{1-m}$.

Уравнение в полных дифференциалах.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, т.е.

$$U(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Искомый общий интеграл уравнения имеет вид:

$$\int P(x, y)dx + \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx \right] dy = C.$$

Дифференциальные уравнения n -го порядка.

Дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{или} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Теорема (существования и единственности решения). Если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и её частные производные по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения $x=x_0, y=y_0, y'=y_0', \dots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$, то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Эти условия называются *начальными условиями*. *Задачей Коши* для дифференциального уравнения называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка* называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, где C_i – произвольные постоянные такие, что:

- а) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных;

б) при заданных начальных условиях постоянные можно подобрать так, что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ будет удовлетворять этим условиям.

Соотношение $\Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Оно неявно определяет общее решение.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение может быть получено путем n последовательных интегрирований.

2. $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (не содержит явно искомой функции y).

Положим $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x) \dots$. Подставив выражения производных в уравнение, получим уравнение $n-1$ порядка относительно неизвестной функции $p(x)$.

3. $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (не содержит явно независимой переменной x).

Положим $y' = p(y)$, тогда $y'' = \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{\partial p(x)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = p'p$.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Определение. Обыкновенное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где a_i – константы ($i = 1, 2, \dots, n$) называется *линейным однородным уравнением n -ого порядка с постоянными коэффициентами*. Для него запишем *характеристическое уравнение*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Возможны различные случаи характеристических корней.

1. Все корни характеристического уравнения действительные и различные. Тогда каждому действительному корню k_i характеристического уравнения будет соответствовать решение:

$$y_i(x) = C_i e^{k_i x},$$

а общим решением уравнения является функция:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

II. Все корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные. Пусть $k_1 = a + ib$ - комплексный корень, тогда сопряженное к нему комплексное число $k_2 = a - ib$ - тоже корень. Каждой паре сопряженных комплексных корней характеристического уравнения соответствует общее решение:

$$e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

III. Среди корней характеристического уравнения есть кратные.

Пусть k_1 - действительный корень кратности m характеристического уравнения (т. е. среди корней есть m равных корней), тогда ему соответствует решение:

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} + \dots + C_m x^{m-1} e^{k_1 x}.$$

Если $k_1 = a + ib$ - комплексный корень кратности m характеристического уравнения, то существует сопряженный ему корень $k_2 = a - ib$ кратности m . Этой паре соответствует решение:

$$e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) + e^{ax} x (C_3 \cos bx + C_4 \sin bx) + \dots \\ + e^{ax} x^{m-1} (C_{2m-1} \cos bx + C_{2m} \sin bx)$$

Из сказанного выше следует, что для любого линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами можно составить общее решение как сумму функций соответствующих каждому корню характеристического многочлена.

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Определение. Обыкновенное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где a_i - константы ($i = 1, 2, \dots, n$) называется *линейным неоднородным уравнением n -ого порядка с постоянными коэффициентами.*

Определение. *Общим решением* линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами называется функция

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x),$$

где $y_0(x)$ – общее решение однородного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

1. Если правая часть неоднородного уравнения имеет вид:

$$f(x) = P_m(x)e^{\gamma x},$$

то частное решение ищем в виде:

$$\tilde{y}(x) = x^s Q_m(x)e^{\gamma x}.$$

$Q_m(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_m(x)$. Число $s=0$, если γ не корень характеристического многочлена, а если γ – корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ нужно решение подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

2. Для уравнения с правой частью

$$f(x) = e^{ax} (P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$$

частное решение можно искать в виде:

$$\tilde{y}(x) = x^s e^{ax} (R_m(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx),$$

где $s=0$ если $a+ib$ не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня $a+ib$ в противном случае, а R_m, T_m – многочлены степени m , равной наибольшей из степеней многочленов P и Q . Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m, T_m , надо подставить решение в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Линейные системы дифференциальных уравнений.

Для простоты будем рассматривать только системы двух уравнений. *Нормальная линейная система* двух уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases}$$

Если в системе, по крайней мере, одна из функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ не равна тождественно нулю, то система называется *неоднородной*, в противном случае – *однородной*.

Неоднородная (однородная) система методом исключения неизвестных сводится к решению неоднородного (однородного) линейного уравнения 2-го порядка.

Уравнения математической физики.

Определение. *Уравнением в частных производных (уравнением математической физики)* называется любое соотношение, которое связывает неизвестную функцию нескольких переменных, ее аргументы и частные производные этой функции. Наивысший порядок частной производной, встречающийся в уравнении, называется его порядком.

Например, уравнение второго порядка относительно функции двух переменных в самом общем виде может быть записано в виде:

$$F(x, y, u(x, y), u'_x(x, y), u'_y(x, y), u''_{xx}(x, y), u''_{xy}(x, y), u''_{yy}(x, y)) = 0.$$

Известно, что решение любого дифференциального уравнения определяется не однозначно. Для выделения единственного решения, учитываются дополнительные условия, вытекающие из конкретной физической (или иной) задачи. Эти условия бывают двух типов: начальные (в случае нестационарных процессов) и граничные. Задача математической физики считается поставленной корректно, если решение, удовлетворяющей всем условиям задачи, существует, определяется единственным образом и является устойчивым (т. е. малым изменениям данных задачи соответствуют малые изменения функции решения).

Классификация уравнений математической физики.

Определение. Пусть $u(x, y)$ - неизвестная функция двух переменных, $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ - известные функции переменных x и y .

Уравнение

$$au''_{xx}(x, y) + 2bu''_{xy}(x, y) + cu''_{yy}(x, y) + F(x, y, u(x, y), u'_x(x, y), u'_y(x, y)) = 0$$

в области D , называется уравнением:

- 1) *гиперболического типа*, если $b^2 - ac > 0$,
- 2) *параболического типа*, если $b^2 - ac = 0$,
- 3) *эллиптического типа*, если $b^2 - ac < 0$

для всех точек этой области.

Наиболее простой вид уравнения, когда в нем отсутствует смешанная производная ($b = 0$), называется его *каноническим видом*.

Уравнения гиперболического типа.

Простейшим уравнением гиперболического типа является *волновое уравнение*:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}.$$

Решение задачи Коши выражается формулой Даламбера []:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx.$$

Уравнения параболического типа.

Простейшим уравнением параболического типа является одномерное уравнение *теплопроводности*:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

которое можно рассматривать как уравнение распространения тепла в однородном ограниченном стержне длиной l .

Начальные условия:

$u(x, 0) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ – температура в начальный момент времени в точке x .

Граничные условия:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \end{cases}.$$

Решение этого уравнение имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \text{где}$$
$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Уравнения эллиптического типа.

Простейшим уравнением эллиптического типа является *уравнение Лапласа* для функции $u(x, y)$ двух переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Определение. *Задача Дирихле* формулируется следующим образом: Найти решение $u(x, y)$ уравнения Лапласа в области D , которое на границе Γ области D совпадает с заданной функцией $f(x, y)$, т. е. $u(M) = f(M)$ для точек $M \in \Gamma$.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса r , при заданных на окружности граничных условиях ищем в виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n.$$

XI. Ряды.

Определение. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются *членами ряда*, n -й член ряда a_n называется также *общим членом ряда*.

Определение. Сумма n первых членов ряда называется *n -й частичной суммой ряда* и обозначается символом S_n :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n.$$

Определение. Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд называется *сходящимся*, а число $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - суммой ряда. Ряд называется *расходящимся*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$ или не существует.

Определение. Ряд, полученный отбрасыванием первых его m членов:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+n} + \dots = R_m$$

называется *остатком ряда* и обозначается R_m . Если ряд сходится, то

$$S_m + R_m = S.$$

Теорема (необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член его стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ не следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. С помощью необходимого признака можно установить лишь расхожимость ряда. Действительно, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Теорема (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда:

- 1) если $l < 1$, то ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, то ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, то необходимо исследование с помощью других признаков.

Теорема (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда:

- 1) если $l < 1$, то ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, то ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, то необходимо исследование с помощью других признаков.

Теорема (интегральный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, причем $a_n \geq a_{n+1}$ для любого n , $a_n = f(n)$. Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ и ряд расходится, если расходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Замечание. Часто это признак дает результат там, где остальные признаки не дают окончательного ответа.

Теорема (признак сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($a_n > 0, b_n > 0$), и выполняется условие $a_n \leq b_n$. Тогда:

- 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- 2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Замечание. Для применения этого признака необходимо знать несколько так называемых “эталонных” рядов, сходимость или расходимость которых известна.

1. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – классический пример расходящегося ряда.

2. Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Если $p \leq 1$, ряд расходится. Если $p > 1$ ряд сходится.

Теорема (предельный признак сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q$.

Тогда, если $q \neq 0, q \neq \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Знакопеременные ряды.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *знакопеременным рядом*, если члены ряда имеют разные знаки.

Определение. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Знакопеременные ряды.

Определение. Ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, называются *знакопеременными рядами* и записываются в виде:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n.$$

Теорема (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} a_n$ удовлетворяют условиям: 1) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена a_1 , т.е. $0 < S < a_1$.

Замечание. Знакочередующийся ряд сначала проверяется на абсолютную сходимость, и если ее нет, то проверяем условную сходимость.

Функциональные ряды.

Определение. Ряд называется *функциональным*, если членами ряда являются функции от переменной x :

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

При каждом фиксированном значении x мы будем получать различные числовые ряды.

Частный случай функционального ряда – степенной ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$$

Определение. *Областью сходимости* степенного ряда называются такие значения x , при которых получающиеся числовые ряды будут сходящимися. Для степенного ряда область сходимости будет иметь следующий вид:

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

где R – *радиус сходимости* степенного ряда, который можно найти по одной из формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}.$$

Теорема. Степенной ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз в каждой точке x его интервала сходимости:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n (x - x_0)^n]'$$

Теорема. Степенной ряд можно почленно интегрировать сколько угодно раз на любом отрезке $[a, b]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости ряда:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n (x - x_0)^n dx.$$

Ряд Тейлора.

Определение. Если функция $y = f(x)$ бесконечно число раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то её можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Определение. Ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ называется рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций.

$$1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$2) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$3) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x < 1),$$

$$5) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(n-m+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1),$$

$$6) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1),$$

$$7) \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

Тригонометрические ряды Фурье.

Определение 1. Тригонометрическим рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , определенной на промежутке $[-\pi, \pi]$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n=1, 2, \dots$$

a_n, b_n называются коэффициентами ряда Фурье.

Теорема Дирихле (достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье). Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет одному из условий:

- 1) $f(x)$ кусочно - гладкая (конечное число разрывов 1-ого рода),
- 2) $f(x)$ кусочно-монотонная и ограничена,

то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева, т. е.

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)), & x = x_0 \end{cases},$$

где x_0 - точка разрыва функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-L, L]$, где L - произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n=1, 2, \dots$$

XII. Теория вероятностей

Случайные события.

Под *испытанием* подразумевается наличие определенного комплекса условий. Возможный результат – исход испытания или наблюдения называется *событием*.

Определение. Результат испытания, который нельзя заранее прогнозировать, называется *случайным событием* A .

Определение. Событие называется *достоверным* U в данном испытании, если оно неизбежно происходит при этом испытании.

Определение. Событие называется *невозможным* V в данном испытании, если оно заведомо не происходит при этом испытании.

Предположим, что в результате рассматриваемого опыта или явления происходит один из взаимно исключающих друг друга исходов, которые будем называть *элементарными событиями* или *элементарными исходами*. Тогда

- 1) каждый исход испытания представляется одним и только одним элементарным событием;
- 2) всякое событие A , связанное с этим испытанием, есть множество конечного или бесконечного числа элементарных событий;
- 3) событие A происходит тогда и только тогда, когда реализуется одно из элементарных событий, входящих в это множество.

Алгебра событий.

Определение. Под *суммой* двух событий A и B понимается событие $A + B \equiv A \cup B$, которое имеет место тогда и только тогда, когда произошло хотя бы одно из событий A и B .

Определение. *Произведением* двух событий A и B называется событие $AB \equiv A \cap B$, состоящее в одновременном появлении как события A так и события B .

Определение. *Разностью* событий A и B называется событие $A \setminus B$, которое состоит в том, что происходит событие A , но не происходит событие B .

Определение. События A и B называются *несовместными* в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого, т.е. если произведение их есть событие невозможное.

Определение. Случайные события образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и если при каждом повторении испытания должно произойти хотя бы одно из них.

Определение. Событие \bar{A} , происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A , называется *противоположным* событию A .

Классическая вероятность.

Рассмотрим классическую модель, т.е. такую систему случайных событий, в которой каждое событие можно представить как сумму нескольких событий, называемых *элементарными событиями*, причем элементарные события образуют полную группу и все элементарные события *равновозможны*.

Определение. В классической модели вероятность любого события A равна отношению числа m случаев, благоприятствующих этому событию, общему числу n всех случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Замечание. Из определения вероятности следует, что равновозможные элементарные события являются *равновероятными*, т.е. обладают одной и той же вероятностью.

Частота, статистическая вероятность.

Пусть производится n однотипных испытаний, одним из исходов которых является событие A .

Определение. Отношение числа появлений m события A к общему числу испытаний n называется *относительной частотой* события A

$$W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

Очевидно, $0 \leq W_n(A) \leq 1$.

Следовательно, $m = W_n(A) \cdot n$, т.е. число появлений события A равно его относительной частоте, умноженной на число испытаний.

Определение. Под *вероятностью события в статистическом смысле* понимается почти достоверный предел его относительной частоты при неограниченно растущем числе испытаний.

Величина $\mu = p \cdot n$ представляет собой *среднее значение* числа появления события A при n испытаниях.

Аксиомы вероятности.

1. Каждому событию A отвечает число $p(A)$, принимающее значение из $[0,1]$ и называемое вероятностью A .
2. Вероятность невозможного события V равна нулю: $p(V) = 0$.
3. Вероятность достоверного события U равна единице: $p(U) = 1$.
4. Вероятность противоположного события \bar{A} равна дополнению вероятности данного события A до единицы, т.е. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
5. Эквивалентные события (каждое из них происходит всякий раз, когда происходит другое) имеют одинаковые вероятности, т. е. если $A = B$, то $p(A) = p(B)$.
6. Говорят, что из события A *следует* событие B ($A \Rightarrow B$), если событие B появляется всякий раз, как только произошло событие A .
Если $A \Rightarrow B$, то $p(A) \leq p(B)$.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если

$$AB = V, \text{ то } p(A + B) = p(A) + p(B).$$

Следствие. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Замечание. Пусть теперь события A и B совместны. Тогда число благоприятных элементарных исходов для события $A + B$ будет равно:

$$m = m_1 + m_2 - m'$$

где m' – число элементарных исходов, благоприятных для события AB .
Поэтому

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2 - m'}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m'}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Зависимые и независимые события. Условная вероятность.

Определение. Вероятность события A при условии, что произошло событие B , называется *условной вероятностью* события A и обозначается:

$$P(A/B) = P_B(A).$$

Свойства условных вероятностей.

1. $0 \leq P(A/B) \leq 1$;
2. если наступление события B исключает возможность осуществления A ($AB = \emptyset$), то $P(A/B) = 0$;
3. если событие B ведет к обязательному осуществлению события A ($B \Rightarrow A$), то $P(A/B) = 1$;
4. если событие A есть объединение непересекающихся событий A_1, A_2, \dots , то $P(A/B) = \sum_k P(A_k/B)$.

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого, т.е.

$$P(A) = P(A/B) = P(A/\bar{B})$$

и

$$P(B) = P(B/A) = P(B/\bar{A}).$$

В противоположном случае события называются *зависимыми*.

Теорема. Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое имеет место, т.е.

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

Следствие. Для двух событий A и B справедливо равенство:

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Правило умножения вероятностей можно легко распространить и на большее число случайных событий. Например, для трех событий A, B, C имеем:

$$P(ABC) = P(AB)P(C/AB) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Рассмотрим случай, когда два события независимы.

Теорема. Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Определение. События называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любое произведение остальных есть события независимые.

Теорема. Вероятность произведения конечного числа независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий. Для n событий это соотношение имеет вид:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Формула полной вероятности и формула Байеса.

Теорема. Если случайные события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Определение. Пусть событие A может произойти в результате появления одного и только одного события H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) из некоторой полной группы несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n . События этой группы называются *гипотезами*.

Теорема. Вероятность события A равна сумме парных произведений вероятностей всех гипотез, образующих полную группу, на соответствующие условные вероятности данного события A , т.е.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) -$$

это *формула полной вероятности*.

Одно из интересных применений формулы полной вероятности связано с формулами Байеса. Если в выражении для условной вероятности

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$$

заменить вероятность $P(A)$ по формуле полной вероятности, получим формулу Байеса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Эта формула применяется для вычисления условной вероятности $P(H_i/A)$ гипотезы H_i после испытания, при котором произошло событие A .

Другими словами формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез, принятые до испытания (*априорные*), по результатам уже произведенного испытания.

Элементы комбинаторики.

Определение. *Размещениями* из n элементов по m называются такие соединения, которые различаются самими элементами или их порядком. Число всех размещений из n элементов по m равно:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Определение. *Перестановками* из n элементов называются их соединения, различающиеся только порядком входящих в них элементов. Число всех перестановок из n различных элементов равно:

$$A_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Если среди n элементов a, b, c, \dots имеются одинаковые (a повторяется α раз, b – β раз, c – γ раз, и т.д.), то число перестановок равно – $\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$.

Определение. *Сочетаниями* из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются только своими элементами. Число сочетаний из n элементов по m равно:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Последние числа равны коэффициентам разложения бинома $(x+y)^k$ по степеням x и называются *биномиальными коэффициентами*.

Последовательные независимые испытания (схема Бернулли).

Пусть проводится n последовательных независимых одинаковых стохастических экспериментов (испытаний), в каждом из которых может наступить событие A . Под *независимыми* понимаются такие эксперименты, в которых события, возникающие в результате экспериментов, являются независимыми в совокупности. Так как испытания одинаковы, то в любом из них событие A наступает с одинаковой вероятностью, обозначим ее $p = P(A)$. Вероятность противоположного события \bar{A} (ненаступления A) обозначим $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Наступление события A обычно называют *успехом*, а ненаступление – *неуспехом (неудачей)*. Требуется найти вероятность $P_{n,m}$ того, что событие A в таких n опытах появится m раз.

Теорема. $P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m}$ – формула Бернулли.

Следствие. Пусть $P_n(m_1, m_2)$ – вероятность того, что событие A произошло не менее m_1 и не более m_2 раз в n испытаниях. Тогда

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Предельные теоремы для схемы Бернулли.

Продолжим рассматривать последовательные независимые испытания. В случае, когда число испытаний n велико, то вычисление по формуле Бернулли затруднительно.

Для больших n вероятность p уменьшается обратно пропорционально n , то есть это означает, что $np \approx \lambda$, где λ – некоторая постоянная.

Теорема (Пуассона). Предположим, что произведение np является постоянной величиной, когда n неограниченно возрастает. Обозначим $\lambda = np$. Тогда для любого фиксированного λ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_{n,m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Формула Пуассона находит применение в теории массового обслуживания.

Теорема (локальная предельная Муавра-Лапласа). Пусть $x_n = \frac{n-m}{\sqrt{npq}}$

и при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ величины x_n ограничены. Тогда

$$\sqrt{npq} P_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}.$$

Замечание. Для функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ составлена таблица. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения $\varphi(x)$ приводятся в таблицах.

Задача: какова вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что в условиях схемы Бернулли событие A , имеющее вероятность $P(A) = p$ ($0 < p < 1$), при n испытаниях появляется не менее m_1 раз и не более m_2 раз?

Эта вероятность определяется по формуле

$$P_n(m_1, m_2) \approx \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $t_{m_1} = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $t_{m_2} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Это составляет содержание *интегральной формулы Лапласа*.

Введем *стандартный интеграл вероятностей (функцию Лапласа)*:

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}).$$

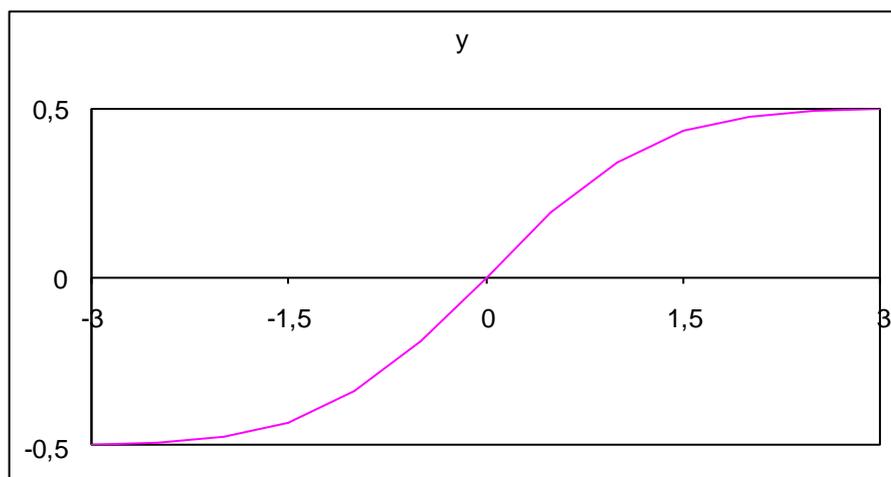
Данная формула приближенно дает вероятность того, что число m появлений события A при n испытаниях удовлетворяет неравенству $m_1 \leq m \leq m_2$, а следовательно, случайная величина t - неравенству $t_{m_1} \leq t \leq t_{m_2}$. Эту формулу часто записывают в виде:

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = P(t_{m_1} \leq t \leq t_{m_2}) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}) \quad - \quad \text{интегральная формула Лапласа.}$$

Приведем таблицу основных значений функции $\Phi_0(x)$.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi_0(x)$	0	0.192	0.341	0.433	0.477	0.494	0.499

График функции $\Phi_0(x)$:



Свойства $\Phi_0(x)$:

1. $\Phi_0(0) = 0$.
2. $\Phi_0(+\infty) = 0.5$.
3. $\Phi_0(-\infty) = -0.5$.
4. $\Phi_0(x)$ – нечетная.
5. $\Phi_0(x)$ – монотонно возрастающая.

Замечание. При $x > 3$, с точностью до тысячных, $\Phi_0 = 0.5$.

Случайные величины.

Определение. Величина называется *случайной*, если она принимает свои значения в зависимости от исходов некоторого испытания, причем для каждого элементарного исхода она имеет единственное значение.

Случайные величины можно разделить на два класса: дискретные и непрерывные.

Определение. Случайная величина называется *дискретной*, если множество всех возможных значений ее конечно.

Геометрическое место всех возможных значений дискретной случайной величины представляет конечную систему точек числовой оси.

Пусть дискретная случайная величина ξ принимает свои различные значения с вероятностями $p_i = P(x_i)$.

Определение. Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется *законом распределения* данной случайной величины.

Закон распределения случайной величины удобно записывать в виде таблицы, которую называют *рядом распределения*.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
$p(\xi = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Для характеристики поведения дискретной случайной величины рассматривалась вероятность того, что ξ принимает конкретные значения. Но такой способ становится неприемлемым, если рассматривать *непрерывную случайную величину*, так как множество ее значений бесконечно и сплошь заполняет некоторый отрезок или интервал числовой прямой. Поэтому можно рассматривать вероятности других событий: таких, когда $\xi < x$, где x – некоторое действительное число. Причем эти события можно определять для обоих классов случаев, как дискретных, так и непрерывных.

Функция распределения.

Определение. *Функцией распределения* случайной величины ξ называется функция $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in R$.

Свойства:

1. $F(x)$ – неубывающая функция.
2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
3. Функция $F(x)$ непрерывна слева.
4. Для любых $a < b$ выполняется равенство $P(a < \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Плотность вероятности.

Определение. *Плотностью распределения* случайной величины ξ называется производная от функции распределения $f(x) = F'(x)$.

Свойства плотности вероятности:

1. Плотность распределения есть функция неотрицательная: $f(x) \geq 0$.
2. $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Следствие. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$

Следствие. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$ (свойство нормировки)

Числовые характеристики случайных величин.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число $M(\xi) = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$

Если случайная величина ξ имеет счетное число значений, то тогда математическое ожидание существует, если сходится ряд $\sum_{k=1}^n x_k p_k,$ в противном случае, математическое ожидание не существует.

Математическое ожидание является вероятностным аналогом среднего арифметического.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta).$$

Следствие. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n).$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(C\xi) = CM(\xi).$$

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ существует, если несобственный интеграл сходится.

Математическое ожидание непрерывных случайных величин обладает теми же свойствами, что и математическое ожидание дискретных случайных величин.

Кроме математического ожидания, которое указывает некоторое среднее значение случайной величины, можно рассматривать и средний разброс случайной величины около своего математического ожидания. Мерой этого разброса (рассеивания) служит *дисперсия*.

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2.$$

Поэтому для дискретных случайных величин

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(\xi))^2 p_i,$$

а для непрерывных случайных величин

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx.$$

Определение. Величина $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ называется *среднеквадратическим отклонением*.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю $D(C) = 0$.
2. Если C – постоянная, то $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$.
3. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Следствие 2. Если C – постоянная величина, то $D(C + \xi) = D(\xi)$.

Следствие 3. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

Начальные и центральные моменты случайной величины.

Определение. Начальным моментом k -го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание k -ой степени случайной величины

$$\mu_k = M(\xi^k).$$

Очевидно, что для дискретных случайных величин

$$\mu_k = \sum_{k=1}^n x^k f(x) dx.$$

Для непрерывных случайных величин

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Определение. Центральным моментом k -го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание k -ой степени случайной величины от своего математического ожидания.

Очевидно, что для дискретных случайных величин

$$D_k = \sum_{k=1}^n (x_i - M(x))^k p_i.$$

Для непрерывных случайных величин

$$D_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^k f(x) dx.$$

Для нахождения дисперсии удобно пользоваться формулой вида:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2.$$

Законы распределения случайных величин.

1. Биномиальное распределение.

Рассмотрим последовательность независимых испытаний по схеме Бернулли.

Пусть ξ – число успехов в n испытаниях Бернулли. Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, \dots, n,$$

и называется *распределением Бернулли* или *биномиальным распределением*. Здесь p – вероятность отдельного успеха, $q = 1 - p$ – вероятность противоположного события, n – число испытаний.

Название связано с тем, что эти вероятности совпадают с соответствующими членами разложения бинома $(q + p)^n$ по степеням p :

$$(q + p)^n = q^n + npq^{n-1} + \dots + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + p^n.$$

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами p и n . При этом $M(\xi) = np$, $D(\xi) = np(1 - p)$.

2. Распределение Пуассона.

Распределение Пуассона часто встречается в задачах, связанных с простейшим потоком событий. Под *потоком событий* следует понимать последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени. Примерами могут служить: поток вызовов на телефонной станции, поток заявок в системе массового обслуживания, последовательность радиоактивного распада частиц.

Простейший поток событий характеризуется следующими свойствами:

а) вероятность наступления того или иного числа событий за любой промежуток времени зависит только от длительности этого промежутка, а не от начала отсчета;

б) указанная вероятность не зависит от того, какое число событий наступило до начала рассматриваемого промежутка времени;

в) за малый промежуток времени вероятность наступления одного события приблизительно пропорциональна длительности такого промежутка, а вероятностью наступления двух или более событий можно пренебречь.

В качестве случайной величины ξ рассмотрим число событий простейшего потока, наступающих за фиксированный промежуток времени t .

Значениями этой случайной величины могут быть любые целые числа $m=1,2,3,\dots$. Соответствующие вероятности обозначим через $p_m(t) = P(\xi = m)$; $p_m(t)$ есть вероятность того, что за фиксированный промежуток времени t наступит ровно m событий простейшего потока. Общее число наступающих за время t событий является случайной величиной, распределенной по *закону Пуассона*:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где постоянная λ равна среднему числу событий, наступающих в единицу времени: $\lambda = M(\xi)$. $D(\xi) = \lambda$.

3. Геометрическое распределение.

Рассмотрим неограниченные испытания Бернулли. Обозначим ξ число испытаний, предшествующих наступлению первого «успеха». Если считать, что каждое испытание длится единицу времени, то можно считать ξ временем ожидания до первого «успеха». Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид:

$$P(k) = p(1-p)^k, k = 0, 1, \dots,$$

и называется *геометрическим распределением*. Оно определяется одним параметром $p > 0$. В соответствующей схеме испытаний Бернулли – это вероятность отдельного «успеха». Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ имеют вид $M(\xi) = \frac{1-p}{p}$, $D(\xi) = \frac{1-p}{p^2}$.

Непрерывные распределения.

1. Нормальное распределение (Гаусса).

Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение (Гаусса). Оно играет большую роль в теории вероятностей, а связано это с тем, что нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения.

Определение. Непрерывная случайная величина ξ имеет *нормальное распределение*, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ некоторые постоянные, называемые параметрами распределения.

Функция распределения $F(x)$ принимает вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

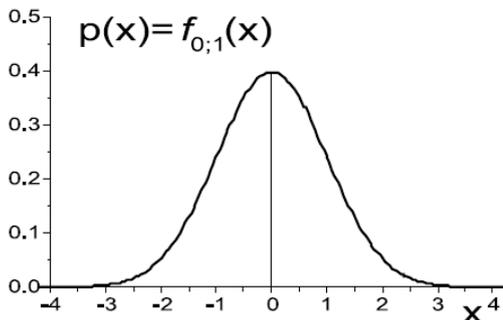
Основные числовые характеристики нормального распределения:

$$M(\xi) = a, \quad D(\xi) = \sigma.$$

После вычисления математического ожидания и дисперсии становится ясным вероятностный смысл параметров a и σ нормального распределения.

Функция плотности нормального распределения $f(x)$ с параметрами $a=0$, $\sigma=1$ называется плотностью *стандартного нормального распределения* случайной величины, то есть для стандартной нормальной случайной величины

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Для вычисления вероятности попадания значения случайной величины, распределенной нормально, в заданный интервал (α, β) обычно пользуются специальной функцией

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Эта функция называется *функцией Лапласа* или *интегралом вероятности*. Ее значения табулированы. При использовании таблицы следует помнить, что функция $\Phi(x)$ — нечетная функция, поэтому в таблице приведены ее значения только для положительного аргумента.

Вероятность попадания нормальной величины ξ в интервал (α, β)

$$P(\alpha \leq \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

2. *Равномерное распределение.* Случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Тогда $M(\xi) = \frac{b-a}{2}$, $D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3. *Распределение Симпсона.* Случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} \cdot |a+b-2x|, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Тогда $M(x) = \frac{2}{3(b-a)^2} \left(a^3 + b^3 - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \right)$, $D(\xi) = \frac{(a,b)}{24}$.

4. *Показательное (экспоненциальное) распределение.* Функция плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \lambda > 0.$$

Тогда $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, $D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$.

5. *Распределение Лапласа.* Случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-a|}, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad \lambda > 0.$$

Тогда $M(\xi) = 2$, $D(\xi) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Предельные теоремы теории вероятностей.

Массовые случайные явления обладают своими закономерностями. *Свойство устойчивости* в какой бы области не появлялось коротко можно охарактеризовать так: конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений; случайные отклонения от среднего значения в каждом

отдельном явлении в массе взаимно погашаются, выравниваются. Именно эта устойчивость средних и представляет собой физическое содержание «закона больших чисел», понимаемого в широком смысле слова: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности. В узком смысле слова «закон больших чисел» в теории вероятностей понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

Неравенство Чебышева. Для любой случайной величины ξ , имеющей конечную дисперсию, при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Следствие. Для любой случайной величины ξ справедливо неравенство:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq 3\sqrt{D(\xi)}) \leq \frac{1}{9}.$$

Теорема (Чебышева). Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной $D(\xi_1) \leq C, D(\xi_2) \leq C, \dots, D(\xi_n) \leq C$, то, каково бы не было постоянное $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(\xi_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Такая сходимость последовательности случайных величин называется сходимостью по вероятности.

Следствие 1 (Теорема Бернулли). Пусть μ — число наступлений события A в n независимых испытаниях и p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Следствие 2 (теорема Пуассона). Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события A в k -м испытании

равна p_k , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\mu - \sum_{k=1}^n p_k}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

где μ – число появлений события А в первых n испытаниях.

Двумерная случайная величина.

Определение. *Функцией распределения системы двух случайных величин (ξ, η) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $\xi < x, \eta < y$:*

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Функция распределения $F(x, y)$ есть вероятность попадания случайной величины в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x, y) , лежащий левее и ниже ее. Функция распределения одной случайной величины ξ – обозначим ее $F_\xi(x)$ – представляет собой вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную справа абсциссой x , а функция распределения η $F_\eta(y)$ – вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную сверху ординатой y .

Свойства функции распределения $F(x, y)$ аналогичны свойствам функции распределения одной случайной величины.

1. Функция $F(x, y)$ есть неубывающая функция обоих своих аргументов, то есть при $x_2 > x_1$, $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$, при $y_2 > y_1$, $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2. Повсюду на $-\infty$ функции распределения равна нулю:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

3. При одном из аргументов, равном $+\infty$, функции распределения системы есть функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу $F(x, +\infty) = F_\xi(x)$, $F(+\infty, y) = F_\eta(y)$.

4. Если оба аргумента равны $+\infty$, функция распределения системы равна 1, т.е. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

5. $P(a < \xi < b, c < \eta < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) - F(a, c)$.

Введенная функция распределения существует для системы любых случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.

Систему дискретных случайных величин можно характеризовать совокупностью вероятностей p_{ij} , которые могут быть сведены в таблицу:

$\eta \setminus \xi$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
⋮
y_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Тогда одномерные законы: $P(\xi = x_k) = \sum_{j=1}^m p_{kj} = p_k$, $P(\eta = y_l) = \sum_{i=1}^n p_{il} = p_l$.

Систему непрерывных случайных величин можно характеризовать плотностью распределения.

Если функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P((\xi, \eta) \in D)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

Функция $f(x, y)$ называется *плотностью распределения системы двух случайных величин*. Тогда

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

Поэтому $P(a < \xi < b, c < \eta < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$.

Плотность распределения удовлетворяет следующим **свойствам**:

1. $f(x, y) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

3. Одномерные плотности имеют вид: $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$; $f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$.

Зависимые и независимые случайные величины.

Определение. Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В противном случае ξ и η называются *зависимыми*.

Таким образом, дискретные случайные величины независимы, если

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) = p_i p_j;$$

непрерывные случайные величины независимы, если $f(x, y) = f_\xi f_\eta$.

Определение. *Корреляционным моментом* случайных величин ξ и η называется число

$$K_{\xi, \eta} = M((\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))).$$

Для дискретных случайных величин

$$K_{\xi, \eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$K_{\xi, \eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))(y - M(\eta)) f(x, y) dx dy.$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то $K_{\xi, \eta} = 0$, но существуют примеры, которые показывают, что хотя $K_{\xi, \eta} = 0$, случайные величины ξ и η зависимы.

Определение. *Коэффициентом корреляции* называется величина

$$r_{\xi, \eta} = \frac{K_{\xi, \eta}}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}} = \frac{K_{\xi, \eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. Для независимых случайных величин $r_{\xi, \eta} = 0$.
2. $|r_{\xi, \eta}| \leq 1$.
3. $|r_{\xi, \eta}| = 1$ тогда и только тогда, когда существуют такие числа $a \neq 0$ и b , что $\eta = a\xi + b$. Значит, коэффициент корреляции характеризует линейную зависимость между случайными величинами.

XIII. Математическая статистика

Задачи математической статистики:

1. Оценка неизвестной вероятности события, оценка числовых характеристик случайных величин, оценка неизвестной функции распределения, оценка параметров функции распределения, вид которой известен, оценка зависимости одной случайной величины от других случайных величин.

2. Проверка статистических гипотез. Например, гипотеза о виде неизвестного распределения.

Пусть X – изучаемая случайная величина с функцией распределения $F(x)$.

Определение. *Генеральной совокупностью случайной величины* называется множество всех ее возможных значений.

Предположим, что имеется возможность получать n ее значений, например, экспериментально.

Определение. *Выборкой объема n* называется множество

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

n отдельных наблюдаемых значений случайной величины из ее генеральной совокупности. Числа x_n называются *элементами (вариантами) выборки*. Числа n_i , указывающие, сколько раз число x_i встречается в выборке, - *частотами*.

Если провести другую серию n из экспериментов, то, как правило, получится другая выборка

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1.$$

В связи с этим множество всех выборок объема n из рассматриваемой генеральной совокупности можно рассматривать как значения системы n случайных величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n.$$

Пусть X – дискретная случайная величина. Оценим по выборке неизвестные вероятности

$$p_i = P(X = x_i).$$

За оценку (приближенное значение) этих вероятностей принимают относительные частоты

$$W_i = \frac{n_i}{n},$$

так как по закону больших чисел (теорема Бернулли) относительная частота W_i по вероятности сходится к вероятности p_i :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|W_i - p_i| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0.$$

Определение. Последовательность (x_i, n_i) , (или (x_i, W_i)) называется *статистическим рядом абсолютных (или относительных) частот*.

При большом объеме выборки строят *группированные статистические ряды*. Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивают на k непересекающихся интервалов (a_i, a_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$ длины h . Например,

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \text{ или } h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n}.$$

В первом случае берутся интервалы $[a_i, a_{i+1})$. Во втором случае в качестве левого конца первого интервала берется $a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}$. Затем $a_1 = a_0 + h$, $a_2 = a_1 + h$ и т. д., пока в последний интервал попадет x_{\max} . Получаем интервалы $(a_i, a_{i+1}]$.

Далее подсчитываются частоты n_i^* – количество элементов выборки, попавших в i -й интервал. Обозначим через x_i^* середины полученных интервалов

$$x_i^* = \frac{a_{i+1} - a_i}{2}.$$

Определение. Последовательность пар (x_i^*, n_i^*) называется *группированным рядом частот*, а $(x_i^*, \frac{n_i^*}{n})$ – *группированным рядом относительных частот*.

Для наглядности строят *полигоны статистических* или *группированных статистических частот* – это ломаные с вершинами (x_i, n_i) или (x_i, n_i^*) . А также *полигоны относительных статистических* или *группированных относительных частот* – это ломаные с вершинами $(x_i, \frac{n_i}{n})$ или $(x_i^*, \frac{n_i^*}{n})$.

Эмпирическая функция распределения.

Определение. Функция $F_n(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число элементов выборки меньших x ($n_x = \sum_{x_i < x} n_i$ – сумма накопленных частот), n – объем выборки, называется *эмпирической функцией распределения*.

Эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами функции распределения. Она равна нулю для $x < x_{\min}$ и единице для $x > x_{\max}$ и не убывает.

Если теоретическая функция распределения $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, то $F_n(x)$ определяет статистическую частоту этого события в n экспериментах. В соответствии с законом больших чисел (теорема Бернулли) при каждом фиксированном x эмпирическая функция распределения сходится по вероятности к теоретической $F(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F(x) - F_n(x)| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$.

Пусть промежуток $[x_{\min}, x_{\max}]$ разбит на k интервалов (a_i, a_{i+1}) длины h и n_i^* – число элементов выборки, попавших в i -й интервал. За оценку плотности $f(x)$ принимается $f_n(x) = \frac{n_i^*}{nh}$ $a_i < x < a_{i+1}$.

Определение. *Гистограмма относительных частот* состоит из прямоугольников с основаниями $[a_i, a_{i+1}]$ и высотами $f_n(x) = \frac{n_i^*}{nh}$.

Статистические оценки числовых характеристик случайных величин и их свойства.

Определение. Статистическая оценка Q^* – это некоторая функция от результатов наблюдений (от выборочных значений), предназначенная для статистического оценивания неизвестных числовых характеристик случайной величины и параметров ее функции распределения.

$Q^* = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где Q^* – оценка величины Q . $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - функция от элементов выборки, ее называют *статистикой*.

Качество оценок характеризуется тремя **основными свойствами**.

1. Состоятельность оценки.

Определение. Оценка $Q^* = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется *состоятельной* для Q , если она по вероятности сходится к Q при неограниченном увеличении величины n - объема выборки, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Q^* - Q| < \varepsilon) = 1$, для любого $\varepsilon > 0$.

2. Несмещённость оценки.

Определение. Оценка $Q^* = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется *несмещенной* для величины Q , если $M(Q^*) = Q$, т.е. математическое ожидание Q^* равняется истинному значению Q .

При выполнении этого свойства оценки не дают систематических ошибок (в одну сторону) при изменении выборочных значений.

3. Эффективность оценки.

Пусть V – среднеквадратическая ошибка оценки $V = M(Q^* - Q)^2$. Если оценка несмещённая, то $V = M(Q^* - Q)^2 = M(Q^* - M(Q^*))^2 = D(Q^*)$, т. е. в этом случае ошибка оценки совпадает с её дисперсией.

Определение. Несмещенная оценка Q^* называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди других несмещенных оценок.

Пусть $Q_1^* = T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $Q_2^* = T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – две различные несмещённые оценки для Q . Если $D(Q_1^*) < D(Q_2^*)$, то оценка Q_1 более *эффективная*, чем Q_2 .

Замечание. Рассмотренные оценки Q^* являются случайными величинами (числами), и в связи с этим их называют *точечными* оценками.

Выборочные (эмпирические) числовые характеристики.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ — выборочное среднее,}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ — выборочная дисперсия,}$$

$$\bar{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \text{ — выборочный момент } k\text{-го порядка.}$$

Эти величины являются точечными оценками соответственно для $M(X)$, $D(X)$, μ_k (μ_k — теоретический момент k -го порядка).

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \text{ — "исправленная" выборочная дисперсия.}$$

Методы получения точечных оценок.

Метод моментов.

Метод моментов получения оценок Q_1^*, \dots, Q_k^* состоит в следующем: приравниваются k первых теоретических и эмпирических (по выборке) моментов и из полученной системы k уравнений с k неизвестными определяются оценки.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j f(x, Q_1^*, \dots, Q_k^*) dx \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Метод максимального правдоподобия.

Методом максимального правдоподобия получают такие оценки Q^* , при которых вероятность реализации рассматриваемых выборок (объёма n) максимальна.

Пусть X — дискретная случайная величина и её закон распределения зависит от k неизвестных параметров Q_1, \dots, Q_k

$$P(X = x_i) = p_i(Q_1, \dots, Q_k), \quad (p_i \neq 0).$$

Тогда вероятность того, что случайные величины X_1, \dots, X_n , определяющие выборку, примут выборочные значения, равна

$$L(x_1, \dots, x_n, Q_1, \dots, Q_k) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(Q_1, \dots, Q_k).$$

Функция L называется *функцией правдоподобия*. Она является законом распределения выборки и при фиксированных выборочных значениях – функцией только неизвестных параметров Q_1, \dots, Q_k .

Уравнения для нахождения оценок (необходимое условие экстремума): $\frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0, j = 1, 2, \dots, k$.

На практике вместо функции L вводят *логарифмическую* функцию правдоподобия $\ln L = \ln \prod_{i=1}^n p_i(Q_1, \dots, Q_k) = \sum_{i=1}^n \ln p_i(Q_1, \dots, Q_k)$.

Точки экстремума функций L и $\ln L$ совпадают, так как

$$\frac{\partial \ln L}{\partial Q_i} = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0, j = 1, 2, \dots, k.$$

Интервальные оценки.

Определение. *Доверительным интервалом* для параметра Q называется интервал $(Q_1(x_1, \dots, x_n), Q_2(x_1, \dots, x_n))$, содержащий (покрывающий) с заданной вероятностью (надежностью) γ истинное значение параметра.

Доверительные интервалы строятся по выборке. Концы интервалов зависят от элементов выборки и в связи с этим являются случайными величинами $P(Q_1 < Q < Q_2) = \gamma$.

Определение. Число γ называется *доверительной вероятностью*, а $\alpha = 1 - \gamma$ – *уровнем значимости*.

$\left(\bar{X} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right)$ – доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известном среднеквадратическом отклонении σ .

$\left(\bar{X} - \frac{t_{\gamma} S^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{t_{\gamma} S^*}{\sqrt{n}} \right)$ – доверительный интервал для математического

ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестном среднеквадратическом отклонении.

$0 < \sigma < S^* (1+q)$ – доверительный интервал для среднеквадратического отклонения нормально распределенной случайной величины.

Статистические гипотезы.

Определение. *Статистической гипотезой* H называется предположение относительно параметров или вида функции (закона) распределения случайной величины X . Статистическая гипотеза называется *простой*, если она однозначно определяет распределение случайной величины или если относительно ее параметров содержит только одно предположение. В противном случае она называется *сложной*.

Определение. Проверяемая (выдвинутая) гипотеза называется *нулевой гипотезой* и обозначается H_0 .

Определение. *Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу H_1 , которая противоречит нулевой.

Статистические критерии для проверки гипотез.

Определение. Для проверки нулевой гипотезы на основании выборочных данных используют специально подобранную случайную величину K , точное или приближенное распределение которой известно. Величину K называют *статистическим критерием*.

Статистика этого критерия (функция от выборочных значений) называется *статистикой* Z критерия K .

Пусть z_B – выборочное значение статистики Z , вычисленное по выборке. *Критерий проверки гипотезы* формулируется следующим образом:

- гипотеза H_0 отклоняется, если $z_B \in V_k$,
- гипотеза принимается, если $z_B \in V \setminus V_k$.

Построение критических областей.

Определение. Множество (область) V_k называется *критической областью*. Таким образом, множество V разбивается на два непересекающихся подмножества: множество V_k – критическая область, множество $V \setminus V_k$ – *область принятия гипотезы*.

Проверка статистической гипотезы может быть разбита на следующие этапы:

- 1) сформулировать проверяемую (H_0) и альтернативную (H_1) гипотезы;
- 2) выбрать уровень значимости α ;
- 3) выбрать статистику Z критерия для проверки гипотезы H_0 ;
- 4) определить выборочное распределение статистики Z при условии, что верна гипотеза H_0 ;
- 5) в зависимости от выбранной альтернативной гипотезы определить критическую область V_k одним из неравенств $Z > z_{1-\alpha}$, $Z < z_\alpha$ или совокупностью неравенств $Z > z_{1-\alpha/2}$ и $Z < z_{\alpha/2}$;
- б) по выборке вычислить z_B ;
- 7) принять статистическое решение:
если $x_b \in V$, то гипотеза отклоняется как не согласующаяся с результатами наблюдений;
если $z_b \in V \setminus V_k$, то принять гипотезу H_0 , т. е. считать, что гипотеза H_0 не противоречит результатам наблюдений.

Ошибки первого и второго рода.

В результате проверки выдвинутой гипотезы могут быть допущены ошибки двух типов:

1) *ошибка первого рода* – отвергнута правильная гипотеза H_0 , когда $P(Z \in V_k / H_0) = \alpha$;

2) *ошибка второго рода* – принята неправильная гипотеза (в действительности верна альтернативная гипотеза), вероятность ошибки второго рода β можно вычислять (для простой альтернативной гипотезы H_1) по формуле $\beta = P(Z \in V \setminus V_k / H_1)$.

Проверка гипотез о виде функции распределения.

Рассмотрим *критерий χ^2 - Пирсона*.

Пусть X – непрерывная случайная величина. Разбиваем область ее значений на r непересекающихся интервалов $\Delta_1, \dots, \Delta_r$, n_k – количество элементов выборки принадлежащих k -му интервалу.

$$p_k = P(X \in \Delta_k), k = 1, \dots, r, \sum_{k=1}^r n_k = n$$

(для вычисления p_k используется гипотетическая функция распределения).

Если X – дискретная величина, то n_k – частоты, с которыми каждое значение встречается в выборке, $p_k = P(X = x_k)$, которое вычисляется по предполагаемому закону распределения случайной величины X . В обоих случаях $\sum_{k=1}^r p_k = 1$.

Если в функцию (закон) распределения входят l неизвестных параметров, то их заменяют оценками, которые получаются, например, методом максимального правдоподобия, после чего вычисляются p_k .

За меру отклонения (за критерий) берется случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}, p_k \neq 0.$$

По выборке вычисляется χ_B^2 и принимается статистическое решение: гипотеза не противоречит выборке при заданном уровне значимости α , если $\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2$; если же $\chi_B^2 > \chi_{1-\alpha}^2$, то гипотеза отклоняется.

Здесь $\chi^2_{1-\alpha}$ – квантиль порядка $1-\alpha$ распределения χ^2 с $(r-l-1)$ -степенями свободы, который вычисляется по таблице.

Определение. Квантилем t_γ порядка γ распределения случайной величины X является корень уравнения $P(X < t_\gamma) = F(t_\gamma) = \gamma$.

Выборочный коэффициент корреляции.

$$r_B = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) / n - \bar{X}\bar{Y}}{S^*(X)S^*(Y)} - \text{выборочный коэффициент корреляции.}$$

Так как выборка случайна, то выборочный коэффициент корреляции является случайной величиной и может служить точечной оценкой коэффициента корреляции случайных величин X и Y .

Линейная регрессия.

Определение. Функция $g(x)$ называется наилучшим приближением величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если $M(X - g(X))^2$ принимает наименьшее возможное значение. И функция $g(x)$ называется среднеквадратической регрессией Y на X .

$g(X) = aX + b$ – линейная среднеквадратическая регрессия, т. е. линейная функция, где $a = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} r$, $b = M(Y) - rM(X) \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$.

$$\text{Т.о., } g(X) = M(Y) + r \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} (X - M(X)).$$

Определение. Прямая $y = M(Y) + r \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} (x - M(X))$

называется прямой среднеквадратической регрессии Y на X .

Определение. Величина $\Delta = \sigma^2(Y)(1-r^2)$ называется остаточной дисперсией Y на X .

Она определяет величину ошибки приближенного равенства $Y \approx aX + b$. Если $r = \pm 1$, то ошибка равна нулю и тогда Y и X связаны линейной функциональной зависимостью.

Аналогично получается прямая *среднеквадратической регрессии X на Y*:

$$x = M(X) + r \frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)} (y - M(Y)).$$

Заменяя в этих уравнениях $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $M(X)$, $M(Y)$ и r на их точечные оценки, получаем *уравнения выборочных прямых среднеквадратических регрессий Y на X и X на Y*:

$$y = \bar{Y} + r_b \frac{S^*(Y)}{S^*(X)} (x - \bar{X}), \quad x = \bar{X} + r_b \frac{S^*(X)}{S^*(Y)} (y - \bar{Y}).$$